ENS Lyon 2011 - 2012
MASTER 1

Algèbre Approfondie

15.11.2011

TD 8

Produit tensoriel d'espaces vectoriels

Soit K un corps. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K de dimension finie.
Notons $\dim(E) = m$ et $\dim(F) = n$. Soient $(v_i)_{i=1\ldots m}$ une base de E et $(w_j)_{j=1\ldots n}$ une base de F. À tout couple d'indices (i,j) attachons un symbole $v_i \otimes w_j$. Le produit tensoriel de E et F sur K, noté $E \otimes_K F$, est le K-espace vectoriel de dimension mn

$$E \otimes_K F = \bigoplus_{i=1\ldots m} \bigoplus_{j=1\ldots n} K \cdot v_i \otimes w_j.$$

On définit $b_\otimes$ comme l'unique application bilinéaire de $E \times F$ dans $E \otimes_K F$ telle que

$$\begin{array}{rccc} b_\otimes : & E \times F & \longrightarrow & E \otimes_K F \\ & (v_i, w_j) & \mapsto & v_i \otimes w_j \end{array}$$

soit bilinéaire.
Si $(x,y) \in E \times F$, on note $x \otimes y := b_\otimes(x,y)$. On a donc les relations :

$$(\mathcal{R}) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \\ x \otimes (y+y') = x \otimes y + x \otimes y' \\ \lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y), \end{array} \right.$$

pour tous $\lambda \in K$, $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$.

Exercice 1. Propriété universelle du produit tensoriel

1. (a) Soit M un K-espace vectoriel. Montrer que pour toute application bilinéaire $b : E \times F \to M$, il existe une unique application linéaire $f_b : E \otimes_K F \to M$ telle que $b(x,y) = f_b(x \otimes y)$ pour tous $x \in E$ et $y \in F$.
   (b) On note $\mathcal{B}((E,F);M)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans M. On note aussi $\mathcal{L}(E \otimes_K F; M)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $E \otimes_K F$ dans M. Montrer que ces espaces vectoriels sont isomorphes.
2. (a) Soit V un K-espace vectoriel et soit $b' : E \times F \to V$ une application bilinéaire. On suppose que pour tout K-espace vectoriel M et pour toute application bilinéaire $b : E \times F \to M$, il existe une unique application linéaire $f_b : E \otimes_K F \to M$ telle que l'on ait la factorisation $b = f_b \circ b'$. Montrer que l'espace vectoriel V est isomorphe au produit tensoriel $E \otimes_K F$.
   (b) En déduire que la définition de l'espace $E \otimes_K F$ ne dépend pas du choix des bases de E et F.

Exercice 2.

1. Calculer les produits tensoriels $E \otimes_K \{0\}$ et $\{0\} \otimes_K F$.
2. Montrer l'équivalence :
$$x \otimes_K y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } y = 0.$$
3. Soit $\{y_1, \ldots, y_r\}$ une famille libre de vecteurs de F. Pour tous $x_1, \ldots, x_r \in E$, montrer l'implication :
$$\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \text{ pour tout } i.$$

Exercice 3. Propriétés du produit tensoriel.
Soient E, F et G trois espaces vectoriels.

1. **Associativité.** Montrer qu'il existe un unique isomorphisme
$$E \otimes_K (F \otimes_K G) \longrightarrow (E \otimes_K F) \otimes_K G$$
envoyant $x \otimes (y \otimes z)$ sur $(x \otimes y) \otimes z$ pour tous $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$.
2. **Commutativité.** Montrer qu'il existe un unique isomorphisme d'espaces vectoriels $E \otimes_K F \simeq F \otimes_K E$. Si $E = F$, remarquer que cet isomorphisme est une involution non triviale qui permute les facteurs.
3. **Produit tensoriel et somme directe.** Montrer qu'il existe un unique isomorphisme
$$(E \oplus F) \otimes_K G \ \longrightarrow\ (E \otimes_K G) \oplus (F \otimes_K G)$$
envoyant $(x, y) \otimes z$ sur $(x \otimes z, y \otimes z)$.
4. **Elément neutre.** Montrer que le produit tensoriel $E \otimes_K K$ est canoniquement isomorphe à E.

Exercice 4. Espace dual.

1. Notons E^* l'espace dual de E et $\mathcal{L}(E; F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Montrer qu'il existe une unique application linéaire
$$E^* \otimes_K F \to \mathcal{L}(E; F)$$
qui envoie $f \otimes y$ sur $x \mapsto f(x)y$, et que cette application est un isomorphisme.
2. Montrer de même qu'il existe une unique application linéaire
$$E^* \otimes_K F^* \to (E \otimes_K F)^*$$
qui envoie $f \otimes g$ sur $x \otimes y \mapsto f(x)g(y)$, et que cette application est un isomorphisme.

Exercice 5. Endomorphismes.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire
$$\mathrm{End}(E) \otimes_K \mathrm{End}(F) \longrightarrow \mathrm{End}(E \otimes_K F)$$
qui envoie $f \otimes g$ sur $x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y)$, et que cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Soient $f \in \mathrm{End}(E)$ et $g \in \mathrm{End}(F)$. On identifie maintenant $f \otimes g$ à son image dans $\mathrm{End}(E \otimes_K F)$ par l'isomorphisme canonique de la question précédente.
   (a) Donner la matrice de l'application $f \otimes g$ dans la base $(v_i \otimes w_j)_{i,j}$.
   (b) Montrer la relation $\mathrm{Tr}(f \otimes g) = \mathrm{Tr}(f)\mathrm{Tr}(g)$;
   (c) Montrer la relation $\det(f \otimes g) = \det(f)^n \det(g)^m$.

Exercice 6. Lien avec les extensions de corps.
Soient L et M deux extensions finies du corps K dans une clôture algébrique $\bar{K}$ de K.

1. Montrer que le produit tensoriel $L \otimes_K M$ est muni d'une structure d'anneau commutatif pour le produit
$$\left(\sum_i x_i \otimes y_i\right)\left(\sum_j x'_j \otimes y'_j\right) = \sum_{i,j} (x_i x'_j \otimes y_i y'_j).$$
2. Montrer que le produit tensoriel $L \otimes_K M$ est un espace vectoriel sur M de dimension finie, et que
$$\dim_M(L \otimes_K M) = \dim_K(L).$$
3. On note LM l'extension composée des corps L et K dans $\bar{K}$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\phi : L \otimes_K M \to LM$ qui envoie $l \otimes m$ sur le produit lm. Montrer que cette application est aussi un morphisme d'anneaux et qu'elle est surjective.
4. On suppose l'extension L/K galoisienne. Montrer alors que l'application ϕ est un isomorphisme si et seulement si $L \cap M = K$. En déduire que $L \otimes_K M$ est un corps si et seulement si $L \cap M = K$.