ENS Lyon 2011 - 2012
MASTER 1

Algèbre Approfondie

22.11.2011

TD 9

Produit tensoriel de modules

Dans toute cette feuille, on fixe un anneau A.

Exercice 1.

Soient I et J deux idéaux de A. Montrer l'existence d'un unique isomorphisme de A-modules :

$$(A/I) \otimes (A/J) \quad \simeq \quad A/(I+J).$$

donné par $(x \mod I) \otimes (y \mod J) \mapsto (xy \mod I+J)$, pour tous $x, y \in A$.

Exercice 2.

Soit I un idéal de A et soit M un A-module. On note IM le sous-A-module de M engendré par les produits rm avec $r \in I$ et $m \in M$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de A-modules :

$$(A/I) \otimes_A M \quad \simeq \quad M/IM$$

donné par $(a \mod I) \otimes m \mapsto (am \mod IM)$, pour tous $a \in A$ et $m \in M$.

Exercice 3.

1. Montrer que si G et H sont deux groupes abéliens finis additifs d'ordres premiers entre eux, alors le $\mathbb{Z}$-module $G \otimes_{\mathbb{Z}} H$ est trivial.
2. Montrer : $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, avec $d = \mathrm{pgcd}(a,b)$.

Exercice 4.

Calculer les produits tensoriels suivants, sur $\mathbb{Z}$:

1. $\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^m$;
2. $\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$;
3. $\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Q}$;
4. $\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;
5. $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
6. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes A$ si A est un groupe abélien,

où m et n sont des entiers ≥ 1.

Exercice 5.

1. Soient $f : E \to E'$ et $f : F \to F'$ deux morphismes surjectifs de A-modules. Montrer que l'homomorphisme
$$f \otimes g : E \otimes F \to E' \otimes F'$$
est aussi surjectif.
2. Dans la question précédente, peut-on remplacer "surjectif" par "injectif" ?

Exercice 6.

1. On suppose donné un morphisme d'anneaux A $\to B$ entre deux anneaux A et B. Soient M et M' deux A-modules, et soit $\varphi : M \to M'$ une application A-linéaire. Montrer que l'application

$$\varphi \otimes_A \mathrm{id}_B \quad : M \otimes_A B \quad \longrightarrow \quad M' \otimes_A B$$

est B-linéaire.

2. Application. Soit A un anneau. Si $A^m \simeq A^n$, montrer $m = n$. S'il existe un morphisme surjectif $A^m \twoheadrightarrow A^n$, montrer $m \geq n$. On pourra aussi utiliser l'exercice précédent.

Exercice 7.

1. Soit $M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ une suite de A-modules. Montrer que cette suite est exacte si et seulement si pour tout A-module N, la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(M_3, N) \to \mathrm{Hom}(M_2, N) \to \mathrm{Hom}(M_1, N)$$

est exacte.

2. Soit $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3$ une suite de A-modules. Montrer qu'elle est exacte si et seulement si pour tout A-module N la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(N, M_1) \to \mathrm{Hom}(N, M_2) \to \mathrm{Hom}(N, M_3)$$

est exacte.

3. À l'aide des questions précédentes, redémontrer que si $M_1 \overset{u}{\to} M_2 \overset{v}{\to} M_3 \to 0$ est une suite exacte de A-modules, et si N est un A-module, alors la suite

$$M_1 \otimes_A N \overset{u \otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} M_2 \otimes_A N \overset{v \otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} M_3 \otimes_A N \to 0$$

est exacte.

Exercice 8.

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de l'anneau A, et soit M un A-module. Montrer l'égalité :

$$M \otimes_A (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = (M \otimes_A \mathfrak{a}) \cap (M \otimes_A \mathfrak{b}).$$

Exercice 9.

On suppose l'anneau A intègre. Soient E et F deux A-modules, et soient $x \in E$ et $x \in F$ deux éléments qui ne soient pas de torsion. Montrer que $x \otimes y \neq 0$.
Indication : on pourra considérer l'extension des scalaires au corps des fractions de l'anneau A.