ÉNS Lyon, Préparation à l'agrégation 2012

Résultant et intersection de courbes planes

Dans ce problème, on étudie le nombre de points d'intersection de deux courbes planes, définies par des équations polynomiales.

Soient donc P et Q des polynômes de $\mathbf{C}[X,Y]$ tels que $\operatorname{pgcd}(P,Q)=1$ dans l'anneau factoriel $\mathbf{C}[X,Y]$.

1. Montrer que P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbf{C}(X)[Y]$.
2. En déduire qu'il existe un polynôme $D \in \mathbf{C}[X]$ non nul, et des polynômes $A, B \in \mathbf{C}[X,Y]$ tels que $D = AP + BQ$.
3. Montrer que $V = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2; P(x,y) = Q(x,y) = 0\}$ est fini.

On veut maintenant estimer le cardinal de V. Pour cela, on fait appel à la théorie du résultant (noter que cette méthode permet aussi, en pratique, de déterminer V). On fait d'abord l'hypothèse que P et Q sont de la forme

$$P = Y^p + \sum_{i=1}^{p} P_i(X) Y^{p-i} \tag{1}$$

$$\text{et } Q = Y^q + \sum_{j=1}^{q} Q_j(X) Y^{q-j}, \tag{2}$$

avec $\deg P_i \leq i$ et $\deg Q_j \leq j$ pour tout i et j. Posons $P_0 = Q_0 = 1$. Soit $R = \text{Rés}_{p,q,Y}(P,Q) \in \mathbf{C}[X]$ le résultant de P et Q, vus comme polynômes en Y, de degrés respectifs p et q. Soit $\pi : (x,y) \mapsto x$ la première projection $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$.

4. Montrer que $\pi(V)$ est l'ensemble des racines de R.
5. On rappelle que la matrice de Sylvester $M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbf{C}[X])$ permettant de calculer R est définie par

$$M = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_0 & P_1 & \cdots & P_p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_0 & P_1 & \cdots & P_p \\ Q_0 & Q_1 & \cdots & \cdots & Q_q & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & Q_0 & Q_1 & \cdots & \cdots & Q_q \end{pmatrix}.$$

   Dans cette matrice, les q premières lignes font intervenir les P_i, tandis que les p dernières lignes font intervernir les Q_j. Montrer que

$$\deg M_{i,j} \leq \begin{cases} j-i & \text{si } 1 \leq i \leq q \\ j-i+q & \text{si } q+1 \leq i \leq p+q. \end{cases}$$

6. En déduire $\deg R \leq pq$ et $\operatorname{card} \pi(V) \leq pq$.

Revenons maintenant au cas général : donnons-nous P et Q premiers entre eux dans l'anneau factoriel $\mathbf{C}[X,Y]$, et notons p (resp. q) le degré total de P (resp. Q).

7. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{C}^2$. Si D est une droite (vectorielle) de $\mathbf{C}^2$ telle que $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}e_1 \oplus D$, on note $\pi_D : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}e_1$ la projection parallèlement à D. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de telles droites D telles que $\pi_D|_V$ ne soit pas injective.
8. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ sauf un nombre fini, les polynômes $P(X+\lambda Y, Y)$ et $Q(X+\lambda Y, Y)$ sont (à une constante multiplicative près) de la forme (1) et (2).
9. En déduire $\operatorname{card} V \leq pq$ dans le cas général.
10. Montrer sur un exemple que l'inégalité peut être stricte.
11. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}$?

Remarque 1. Comment déterminer V en pratique ? Lorsque les équations ne semblent pas pouvoir se résoudre "à la main", on commence par calculer $\pi(V)$, ou toute autre projection adaptée au problème, grâce à un résultant. En remplaçant les valeurs obtenues dans les polynômes P et Q, on est alors ramenés à trouver les racines communes de deux polynômes en une variable, ce qui se fait à la main ou en calculant un pgcd.

Remarque 2. Le théorème de Bézout affirme que si l'on compte correctement les points d'intersection des courbes $P(x,y) = 0$ et $Q(x,y) = 0$, on obtient précisément pq. Pour y arriver, il faut travailler dans l'espace projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, et considérer le sous-ensemble $\widetilde{V}$ de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ défini par l'annulation des polynômes $\widetilde{P} = Z^p P(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$ et $\widetilde{Q} = Z^q Q(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$, qui sont homogènes de degrés respectifs p et q dans $\mathbf{C}[X,Y,Z]$ (on vérifiera que $V = \widetilde{V} \cap \mathbf{C}^2$). Le résultant $\widetilde{R} = \text{Rés}_{p,q,Z}(\widetilde{P}, \widetilde{Q})$, calculé par rapport à Z et en degrés p et q, est alors un polynôme homogène de degré pq en X et Y (voir M.-P. Malliavin, *Algèbre commutative*, Masson, 1984, Chapitre 11, Lemme 8.1). Il est également nécessaire de compter le nombre de points d'intersection avec multiplicité : même en projectif, on peut avoir $\operatorname{card} \widetilde{V} < pq$ (trouver un exemple !). En première approche, on peut définir la multiplicité d'un point d'intersection comme la multiplicité de la racine correspondante du résultant (pour une projection convenable), ce qui permet alors de "démontrer" le théorème de Bézout.