ENS Lyon — Algèbre

Préparation à l'agrégation — 2011-2012

Feuille d'exercices n°1

Exercice 1 Soit G un groupe et $x, y \in G$ d'ordres respectifs $m, n \geq 1$. On suppose que x et y commutent et que m et n sont premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre mn.

Exercice 2 Soit G un groupe. Montrer que tout sous-groupe d'indice 2 de G est distingué.

Exercice 3 Soit G un groupe. On suppose que H est un sous-groupe distingué de G et on note $\pi : G \to G/H$ le morphisme canonique. Soit K un sous-groupe de G. À quelle condition la restriction de π à K est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4 Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G.

1. Montrer qu'il y a une bijection entre les sous-groupes de G/H et les sous-groupes de G contenant H, et que cette bijection préserve les sous-groupes distingués.
2. Montrer que si K est un sous-groupe distingué de G contenant H, alors on a un isomorphisme $\frac{G/H}{K/H} \cong G/K$.
3. Trouver un exemple de groupes $H \subset K \subset G$ tels que H est distingué dans K, K est distingué dans G mais H n'est pas distingué dans G.

Exercice 5 Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Soit K un sous-groupe quelconque de G.

1. Montrer que $KH = \{kh; k \in K, h \in H\}$ est un sous-groupe de G. Donner un contre-exemple dans le cas où H n'est pas distingué dans G.
2. Montrer que $K \cap H$ est distingué dans K.
3. Montrer l'isomorphisme $KH/H \cong K/(K \cap H)$.

Exercice 6 Soit G le groupe d'isométries du plan engendré par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, et par la symétrie s d'axe (Ox).

1. Montrer que G est de cardinal $2n$.
2. Montrer que G est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
3. Déterminer le centre de G (on distinguera suivant la parité de n).
4. Montrer que G est le groupe des isométries du polygone régulier de sommets $e^{2ik\pi/n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$.

Exercice 7 Soit G un groupe. On note $D(G)$, et on appelle *groupe dérivé de G*, le sous-groupe engendré par les commutateurs $xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in G$.

1. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G et que $G/D(G)$ est abélien.

2. Montrer que si $H \trianglelefteq G$ et G/H est abélien, alors $D(G) \subset H$.
3. Déterminer les groupes dérivés des groupes $\mathfrak{S}_3$ et D_4.

Exercice 8 On rappelle que le groupe quaternionique $H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ vérifie $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$ et $jk = -kj = i$.

1. Déterminer le centre Z de H_8 et la structure de H_8/Z.
2. Quels sont les sous-groupes distingués de H_8 ?
3. Déterminer le groupe dérivé de H_8.
4. Les groupes D_4 et H_8 sont-ils isomorphes ?

Exercice 9 Soit G un groupe. On note $\mathrm{Int}(G)$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$ formé des automorphismes intérieurs.

1. Montrer l'isomorphisme $\mathrm{Int}(G) \cong G/Z$, où Z est le centre de G.
2. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.

Exercice 10 Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 11 Soit G un groupe abélien. Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, G)$ est muni d'une structure de groupe abélien, et que ce groupe est isomorphe à G.

Exercice 12

Soit G un groupe abélien. On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que pour tout $x \in G$, on ait $px = 0$.

1. Montrer que G possède une unique structure de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel compatible avec sa structure de groupe.
2. Soit H une partie de G. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de G si et seulement si H est un sous-groupe de G.