ENS Lyon — Algèbre
Préparation à l'agrégation — 2011-2012

Groupes. Actions de groupes.

Exercice 1

Soit G un groupe et H, K des sous-groupes d'indice fini de G.

1. Montrer que $H \cap K$ est d'indice fini dans G et que l'on a $[G : H \cap K] \leq [G : H][G : K]$.
2. Montrer que si $[G : H]$ et $[G : K]$ sont premiers entre eux alors $[G : H \cap K] = [G : H][G : K]$.
3. Montrer que si G agit transitivement sur deux ensembles finis A et B dont les cardinaux sont premiers entre eux, alors G agit transitivement sur $A \times B$.

Exercice 2 Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble E non vide. Pour tout $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}(g)$ l'ensemble des points fixes de $g : E \to E$.

1. Montrer que lorsque g parcourt G, la moyenne de $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(g))$ est 1.
   (*Indication* : considérer $\{(g, x) \in G \times E,\ g \cdot x = x\}$)
2. En déduire que si $\mathrm{card}(E) \geq 2$ alors G possède un élément agissant sans point fixe sur E.
3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il lorsque G et E sont infinis ?

Exercice 3 Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Le groupe G agit par multiplication à gauche sur G/H. On note

$$\rho : G \to \mathfrak{S}(G/H)$$

le morphisme associé.

1. Soit $K = \ker \rho$. Montrer que $K = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ et que K est le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans H.
2. On suppose G fini et on note p le plus petit facteur premier de $\mathrm{card}\, G$. Montrer que tout sous-groupe d'indice p de G est distingué.
3. Montrer que tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 4

Soit G un groupe fini et $k \in \mathbf{Z}$. Montrer que la fonction $f : G \to G$ définie par $f(g) = g^k$ est une bijection si et seulement si k et $\mathrm{card}(G)$ sont premiers entre eux.

Exercice 5

Soit G un groupe fini. On note k le nombre de classes de conjugaison de G et $g_1, \ldots, g_k$ des représentants de ces classes. Pour $1 \leq i \leq k$, on pose $n_i = \#\{g \in G; gg_i = g_i g\}$.

1. À l'aide de la formule des classes, montrer que $1 = \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k}$.
2. Montrer que le seul groupe ayant exactement 2 classes de conjugaison est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
3. Montrer que les seuls groupes ayant exactement 3 classes de conjugaison sont $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{S}_3$.
4. Pour tout $\ell \geq 1$, montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini (à isomorphisme près) de groupes ayant exactement ℓ classes de conjugaison.

Exercice 6 (Groupes d'ordre 6)

Montrer que tout groupe d'ordre 6 est isomorphe à $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ ou à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 7 (Groupes d'ordre 8)

Soit G un groupe non abélien d'ordre 8.

1. Montrer que G possède un élément x d'ordre 4.
2. Soit $y \in G \backslash \langle x \rangle$. Montrer que $yxy^{-1} = x^{-1}$.
3. Montrer que $y^2 \in \{1, x^2\}$.
4. Montrer que si $y^2 = 1$ (resp. $y^2 = x^2$) alors G est isomorphe à D_4 (resp. H_8).
5. En déduire la liste des groupes d'ordre 8 à isomorphisme près.

Exercice 8

1. Soit G un groupe et Z un sous-groupe du centre de G. On suppose que G/Z est monogène. Montrer que G est abélien.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.
3. Soit G un groupe non abélien d'ordre p^3. Montrer que le centre Z de G est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, que G/Z est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et que $D(G) = Z$.
4. Donner un exemple de groupe d'ordre p^3 non abélien.
5. Soit G un groupe tel que le groupe des automorphismes de G est monogène. Montrer que G est abélien.

Exercice 9 (Groupes d'ordre pq)

Soit G un groupe d'ordre pq, où $p < q$ sont des nombres premiers. Soient a et b des éléments de G d'ordre respectif p et q.

1. Montrer que $\langle b \rangle$ est le seul sous-groupe de G d'ordre q.
2. On suppose $q \not\equiv 1 \pmod{p}$. Montrer que a et b commutent et en déduire que G est isomorphe à $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$.
3. On suppose $q \equiv 1 \pmod{p}$. Montrer $aba^{-1} = b^e$ avec $e^p \equiv 1 \pmod{q}$ et $e \not\equiv 1 \pmod{q}$.
4. Montrer que G est produit semi-direct de ses sous-groupes $\langle b \rangle$ et $\langle a \rangle$.
5. Montrer que si $q \equiv 1 \pmod{p}$ alors il existe un et un seul groupe non abélien d'ordre pq à isomorphisme près.
6. En déduire la classification des groupes d'ordre $2p$, où p est un nombre premier impair.

Exercice 10

Soit G un groupe d'ordre p^n, avec p premier et $n \geq 0$. Montrer que pour tout $m \in \{0, \ldots, n\}$, il existe un sous-groupe de G d'ordre p^m (pour le cas non abélien, on pourra procéder par récurrence sur n et considérer le quotient de G par son centre).