ÉNS Lyon — Algèbre
Préparation à l'agrégation — 2011-2012

Feuille d'exercices n°4 – Groupes symétriques, actions de groupes

Exercice 1 (Petits groupes symétriques et alternés)

1. Donner les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$.
2. Combien y a-t-il de classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_6$?
3. Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_{10}$?
4. Trouver un morphisme de groupes surjectif de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathfrak{S}_3$.
5. Existe-t-il un morphisme de groupes surjectif de $\mathfrak{S}_{n+1}$ sur $\mathfrak{S}_n$ si $n \geq 4$?
6. Montrer que $\mathfrak{A}_4$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 2 (Groupe dérivé du groupe symétrique)

Montrer que le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 3 (Parties génératrices)

1. Soit p premier. Montrer que pour tout p-cycle $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_p$, on a $\mathfrak{S}_p = \langle \sigma, \tau \rangle$. Montrer que cela est faux dans $\mathfrak{S}_4$.
2. Montrer que si n est pair (resp. impair) alors les n-cycles de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$ (resp. $\mathfrak{A}_n$).

Exercice 4

Soit p premier impair. Soit H un sous-groupe strict de $\mathfrak{S}_p$ tel que $(\mathfrak{S}_p : H) < p$.

1. Montrer que tout p-cycle appartient à H.
2. En déduire que $H = \mathfrak{A}_p$.
3. Montrer que $\mathfrak{S}_5$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 30 ou 40.

Exercice 5 (Cycles et produits de transpositions)

1. Montrer que le cycle $c = (1\,2\ldots n) \in \mathfrak{S}_n$ est produit de $n-1$ transpositions.
2. Montrer que c n'est pas produit de k transpositions avec $k \leq n-2$.

Exercice 6 (Points fixes)

Quel est le nombre moyen de points fixes d'une permutation d'un ensemble à n éléments ?

Exercice 7 (Carrés dans le groupe symétrique)

1. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les carrés de $\mathfrak{S}_n$.
2. Tout élément de $\mathfrak{A}_n$ est-il le carré d'un élément de $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 8 (Commutant)

Le *commutant* de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est $\{\tau \in \mathfrak{S}_n, \sigma\tau = \tau\sigma\}$. Calculer le cardinal du commutant de σ en fonction de la longueur des cycles intervenant dans la décomposition de σ. (*Indication* : on pourra commencer par traiter le cas où σ est un cycle.)

Exercice 9

Soit G un groupe d'ordre $n = 2^a m$ avec $a \geq 1$ et m impair. On suppose que G possède un élément h d'ordre 2^a. On fait agir G sur lui-même par multiplication à gauche, ce qui permet d'identifier G à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

1. Décomposer h en produit de cycles disjoints dans $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que $\varepsilon(h) = -1$.
3. En déduire que si $n \geq 4$ alors G n'est pas simple.

Exercice 10 (Actions k-transitives)

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. On dit que G agit k-transitivement si $k \leq \mathrm{Card}(X)$ et si pour tous $x_1, \ldots, x_k$ et $y_1, \ldots, y_k$ des k-uplets d'éléments distincts de X, il existe $g \in G$ tel que pour tout i, $gx_i = y_i$.

1. Qu'est-ce qu'une action 1-transitive ?
2. Donner un exemple de groupe agissant transitivement sur un ensemble, mais pas 2-transitivement.
3. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ agit n-transitivement sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Soit G un groupe agissant fidèlement et n-transitivement sur un ensemble X à n éléments, montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.
4. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ agit $(n-2)$-transitivement mais pas n-transitivement sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.
5. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ agit 3-transitivement mais pas 4-transitivement sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 11

On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ désigne le groupe des matrices $n \times n$ à coefficients entiers et de déterminant ± 1. Déterminer les orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^n$.

Exercice 12

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$. Montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$.

(*Indication* : on pourra montrer que G stabilise un réseau)