Feuille d'exercices n°8 – Anneaux, polynômes

Exercice 1

Soit A un anneau commutatif. Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps. Expliciter un idéal non principal de $\mathbf{Z}[X]$, de $K[X,Y]$.

Exercice 2

Soit A un anneau commutatif de caractéristique p premier. Montrer la formule $(a+b)^p = a^p + b^p$ pour tout $a, b \in A$. En déduire que l'application $a \mapsto a^p$ est un endomorphisme de l'anneau A.

Exercice 3

Soit A un anneau commutatif et I, J des idéaux de A. On note $\pi : A \to A/I$ la projection canonique. Montrer l'isomorphisme d'anneaux $(A/I)/\pi(J) \cong A/(I+J)$.

Exercice 4

On note $\mathbf{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauß.

1. Montrer l'isomorphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[X]/(X^2+1) \cong \mathbf{Z}[i]$.
2. En utilisant l'exercice 3, montrer que l'anneau quotient $\mathbf{Z}[i]/(1+i)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
3. Montrer de même que $\mathbf{Z}[i]/3\mathbf{Z}[i]$ est un corps à 9 éléments.

Exercice 5

Soit G un groupe abélien. On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que pour tout $x \in G$, on ait $px = 0$.

1. Montrer que G possède une unique structure de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel compatible avec sa structure de groupe.
2. Soit H une partie de G. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de G si et seulement si H est un sous-groupe de G.

Exercice 6

Soit K un corps et V un $K[X]$-module. Montrer que V est de manière naturelle un K-espace vectoriel et que l'application $f : V \to V$ définie par $f(v) = X \cdot v$ est K-linéaire.

Réciproquement, si V est un K-espace vectoriel et $f \in \mathrm{End}_K(V)$, montrer que V possède une unique structure de $K[X]$-module telle que $X \cdot v = f(v)$ pour tout $v \in V$.

Exercice 7

Soit M un A-module. On appelle annulateur de M, et on note $\mathrm{Ann}(M)$, l'ensemble des $a \in A$ tels que pour tout $m \in M$, on ait $am = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ann}(M)$ est un idéal de A.
2. Montrer que si I est un idéal de A, alors $\mathrm{Ann}(A/I) = I$.
3. Montrer que si $A = \mathbf{Z}$ et M est un groupe abélien fini, alors $\mathrm{Ann}(M)$ est engendré par l'exposant de M.
4. Montrer que si $A = K[X]$ avec K un corps, et si V est un $K[X]$-module de dimension finie sur K, alors $\mathrm{Ann}(V)$ est engendré par le polynôme minimal de l'endomorphisme f défini dans l'exercice 6.

Exercice 8

1. À quoi correspondent, en termes de groupes abéliens, les $\mathbf{Z}$-modules de type fini de torsion ?
2. À quoi correspondent, en termes de K-espaces vectoriels munis d'un endomorphisme, les $K[X]$-modules de type fini de torsion ?

Exercice 9

Soit A un anneau commutatif et $G \in A[X]$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$.

1. Montrer que pour tout polynôme $F \in A[X]$, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $A[X]$ tels que $F = QG + R$ et $\deg(R) < d$.
2. Montrer que le A-module quotient $A[X]/(G)$ est libre de rang d, et en donner une base.

Exercice 10

Soit A un anneau intègre et $S_1, \ldots, S_n$ des parties infinies de A. Soit $P \in A[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme tel que la fonction polynomiale associée à P s'annule sur $S_1 \times \cdots \times S_n$. Montrer que $P = 0$.

En déduire que si A est un anneau intègre infini, on peut identifier polynômes de $A[X_1, \ldots, X_n]$ et fonctions polyomiales de A^n dans A.