ÉNS Lyon
Préparation à l'agrégation 2012

Polynômes en plusieurs indéterminées

Exercice 1 Soit A un anneau commutatif unitaire. Montrer l'isomorphisme de A-algèbres $A[X,Y]/(Y^2-X^3) \cong A[T^2,T^3]$.

Exercice 2 Montrer que $P \in A[X_1,\ldots,X_n]$ est homogène de degré d si et seulement si $P(TX_1,\ldots,TX_n) = T^d P(X_1,\ldots,X_n)$ dans $A[X_1,\ldots,X_n,T]$.

Exercice 3 Soit A un anneau intègre et $P \in A[X_1,\ldots,X_n]$ un polynôme homogène non nul. Montrer que si $P = FG$ avec $F, G \in A[X_1,\ldots,X_n]$, alors F et G sont homogènes.

Applications.

(a) Montrer que $X_1^2+\ldots+X_n^2$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$ si $n \geq 2$.

(b) Montrer que $X_1^2+\ldots+X_n^2$ est irréductible dans $\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_n]$ si $n \geq 3$.

Exercice 4 Soit K un corps. Soit $F \in K[X_1,\ldots,X_n]_d$ et $G \in K[X_1,\ldots,X_n]_{d+1}$ des polynômes premiers entre eux. Montrer que $F+G$ est irréductible.

Application. Montrer que si $r, s \geq 1$ sont premiers entre eux alors X^r+Y^s est irréductible dans $K[X,Y]$.

Exercice 5 **(Relations de Newton)** Soit K un corps et $n \geq 2$. Pour tout $k \geq 0$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^n X_i^k$ (avec la convention $S_0 = n$).

1. Soit B un anneau et $P = T^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k T^k \in B[T]$. Pour tout $c \in B$, donner explicitement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $T-c$.
2. On pose $F = \prod_{i=1}^n (T-X_i)$. Exprimer $F/(T-X_i)$ en termes des polynômes symétriques élémentaires.
3. En exprimant de deux manières $\frac{\partial F}{\partial T}$, démontrer les relations suivantes

$$S_k + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \Sigma_j S_{k-j} + (-1)^k k \Sigma_k = 0 \qquad (1 \leq k \leq n).$$

4. En évaluant $T^{k-n}F$ en X_i, montrer que

$$S_k + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \Sigma_j S_{k-j} = 0 \qquad (k \geq n).$$

5. Montrer que si $\mathrm{car}(K) = 0$, alors $S_1, \ldots, S_n$ sont algébriquement indépendants sur K et engendrent $K[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

Exercice 6 Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme antisymétrique. Montrer qu'il existe un unique $Q \in K[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ tel que $P = \Delta Q$.

(On pourra commencer par le cas $n = 2$).

Exercice 7 Exprimer les polynômes suivants en termes des polynômes symétriques élémentaires :

(a) $X^2 + Y^2 + Z^2$;

(b) $X^2(Y + Z) + Y^2(X + Z) + Z^2(X + Y)$;

(c) $X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2$.

Exercice 8 On rappelle que $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(X_i - X_j)$. Exprimer Δ^2 en termes des polynômes symétriques élémentaires pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 9 Soit $F \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n. Soit L/K une extension de corps telle que $F = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$. Montrer que pour tout $r \geq 1$, le polynôme $F_r = (X - \alpha_1^r) \cdots (X - \alpha_n^r)$ appartient à $K[X]$.

Calculer F_r pour $F = X^3 - X - 1$ et $r \in \{2, 3\}$.