ÉNS Lyon
Préparation à l'agrégation 2012

Séries formelles

Exercice 1

Soit K un corps. On munit K de la topologie discrète et $K[[T]]$ de la topologie produit, c'est-à-dire de la topologie la moins fine pour laquelle toutes les projections $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \mapsto a_n$ soient continues.

1. Montrer que pour tout $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in K[[T]]$, la suite $(F_N)_{N\geq 0}$ définie par $F_N = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n$ converge vers F dans $K[[T]]$.
2. À quelle condition une suite de $K[[T]]$ converge-t-elle vers 0 ?
3. À quelle condition une série de $K[[T]]$ converge-t-elle dans $K[[T]]$?

Exercice 2

Soit $G \in K[[T]]$ une série formelle telle que $\mathrm{val}(G) \geq 1$. On note $\varphi_G : K[[T]] \to K[[T]]$ l'application définie par $\varphi_G(F) = F \circ G$.

1. Vérifier que φ_G est un morphisme de K-algèbres.
2. À quelle condition sur G l'endomorphisme φ_G est-il injectif ?
3. Montrer que φ_G est surjectif si et seulement si $\mathrm{val}(G) = 1$.
4. Montrer que l'ensemble $E = \big\{G \in K[[T]] : \mathrm{val}(G) = 1\big\}$ muni de la loi de composition interne $\circ$ est un groupe.

Exercice 3

Montrer que le seul morphisme de K-algèbres de $K[[T]]$ dans K est le morphisme « évaluation en 0 », défini par $\varphi\big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n\big) = a_0$.

Exercice 4

Soit K un corps et $n \geq 1$ un entier. Montrer l'isomorphisme de K-algèbres $K[T]/(T^n) \cong K[[T]]/(T^n)$.

Exercice 5 (Une identité combinatoire)

Pour tous entiers $n \geq 1$ et $k \geq 0$, on pose

$$S(n,k) = \mathrm{Card}\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n : k_1 + \cdots + k_n = k\}.$$

1. Démontrer l'identité suivante dans $\mathbf{Q}[[T]]$:
$$\sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)T^k = \frac{1}{(1-T)^n}.$$
2. En déduire la formule $S(n,k) = C_{n+k-1}^{k-1}$.
3. Si K est un corps, que vaut $\dim_K K[X_1, \ldots, X_n]_d$?

Exercice 6 (Dérangements)

Pour $n \geq 1$, on note D_n le nombre de *dérangements* de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ sans point fixe. On pose $D_0 = 1$ et $D(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} T^n \in \mathbf{Q}[[T]]$.

1. Démontrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k}$.
2. Établir l'identité $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = e^T \cdot D(T)$ dans $\mathbf{Q}[[T]]$.
3. En déduire la formule $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Lorsque n est grand, quelle est la probabilité qu'une permutation d'un ensemble à n éléments possède un point fixe ?

Exercice 7 (Identités de Newton)

Soit $n \geq 1$ un entier et $K = \mathbf{Q}(X_1, \ldots, X_n)$. Pour tout entier $k \geq 1$, on définit la somme de Newton $S_k = X_1^k + \cdots + X_n^k$. Le but de cet exercice est d'obtenir une expression de S_k en termes des polynômes symétriques élémentaires.

1. Exprimer le polynôme $P(T) = \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i T) \in K[T]$ en termes des polynômes symétriques élémentaires $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$.
2. Démontrer l'identité suivante dans $K[[T]]$:
$$-\frac{TP'(T)}{P(T)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i T}{1 - X_i T} = \sum_{k=1}^{\infty} S_k T^k.$$
3. En déduire, pour tout $k \geq 1$, l'égalité
$$S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}\Sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k \Sigma_k = 0.$$
(On convient que $\Sigma_m = 0$ pour tout $m > n$.)
4. Démontrer que $S_k \in \mathbf{Z}[\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k]$ pour tout $k \geq 1$.
5. Écrire explicitement S_1, S_2, S_3 et S_4 en termes des polynômes symétriques élémentaires.
6. Démontrer que $\Sigma_k \in \mathbf{Q}[S_1, \ldots, S_k]$ pour tout $k \geq 1$.