ÉNS Lyon
Préparation à l'agrégation 2012

Extensions de corps

Exercice 1

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$, unitaire. On suppose que P possède une racine dans $\mathbf{Q}$. Montrer que cette racine est dans $\mathbf{Z}$ et divise le coefficient constant de P.

Exercice 2

Montrer que le seul endomorphisme d'anneau de $\mathbf{R}$ est l'identité.

Exercice 3

Soit K un corps. Déterminer les polynômes à coefficients dans K de dérivée nulle.

Exercice 4

Soient K un corps et P un polynôme à coefficients dans K, de degré d. Montrer que P est irréductible si et seulement si il n'existe pas d'extension de K de degré inférieur ou égal à $d/2$ dans laquelle P a une racine.

Exercice 5

Soit p un nombre premier.

1. Quel est le degré de l'extension $\mathbf{Q}(\sqrt[p]{2})/\mathbf{Q}$?
2. Quels sont les sous-corps de $\mathbf{Q}(\sqrt[p]{2})$?

Exercice 6

L'algèbre des quaternions $\mathbf{H}$ est la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$ munie de la loi d'addition évidente, de la loi de multiplication $\mathbf{R}$-bilinéaire vérifiant $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ et admettant 1 comme élément unité.

1. Soit $u = x + yi + zj + tk \in \mathbf{H}$. Que vaut le déterminant de l'endomorphisme $v \mapsto uv$ de $\mathbf{H}$?
2. En déduire que $\mathbf{H}$ est un corps non commutatif.
3. Trouver tous les éléments u de $\mathbf{H}$ vérifiant $u^2 = -1$.

4. En déduire qu'il existe une infinité de morphismes de corps de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{H}$ qui sont l'identité sur $\mathbf{R}$.

Exercice 7 Soit K un corps.

1. On fixe une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$. Montrer qu'il existe un unique automorphisme φ_M du corps $K(X)$ qui est l'identité sur K et tel que $\varphi_M(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$.
2. À quelle condition sur $M \in \mathrm{GL}_2(K)$ l'automorphisme φ_M laisse-t-il stable $K[X]$?
3. À quelle condition sur $M, M' \in \mathrm{GL}_2(K)$ a-t-on $\varphi_M = \varphi_{M'}$?
4. Montrer que tout automorphisme du corps $K(X)$ qui fixe K est de la forme φ_M avec $M \in \mathrm{GL}_2(K)$.
5. En déduire que le groupe $\mathrm{Aut}_K(K(X))$ des automorphismes de $K(X)$ qui fixent K est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(K)$.

Exercice 8

On considère le nombre réel $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Montrer que α est algébrique sur $\mathbf{Q}$ et déterminer son polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$.
2. Donner la liste des conjugués de α sur $\mathbf{Q}$.
3. Montrer que α appartient au corps $\mathbf{Q}(\zeta)$, avec $\zeta = e^{\frac{i\pi}{8}}$. *On pourra calculer* $\Re(\zeta)$.
4. Quel est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}$? Montrer $\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}(\zeta) \cap \mathbf{R}$.

Exercice 9

1. Trouver un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Q}$, non nul et ayant $3-5\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$ comme racine.
2. En déduire une expression de l'inverse de $3-5\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$ comme un polynôme en $\sqrt[3]{2}$ et à coefficients dans $\mathbf{Q}$.

Exercice 10

Montrer que le sous-corps de $\mathbf{R}$ formé des réels algébriques sur $\mathbf{Q}$ est une extension de degré infini de $\mathbf{Q}$.

Exercice 11

Soient K un corps et L une extension de K ; on suppose L algébriquement clos. Montrer que l'ensemble des éléments de L qui sont algébriques sur K forme une clôture algébrique de K.

Exercice 12

Montrer que le corps de décomposition de $X^3 - 2$ sur $\mathbf{Q}$ est une extension de degré 6 de $\mathbf{Q}$.

Exercice 13

Soient L/K une extension finie de corps et α un élément de L. Montrer que le polynôme caractéristique de la multiplication par α, vue comme endomorphisme K-linéaire de L, est un polynôme non nul à coefficients dans K qui annule α.

Exercice 14 (Irréductibilité du polynôme $X^p - a$)

Soit K un corps et $a \in K$ un élément qui n'est pas une puissance p-ième dans K. Le but de cet exercice est de montrer que le polynôme $X^p - a$ est irréductible dans $K[X]$.

Soit $F \in K[X]$ un facteur irréductible de $X^p - a$, et L un corps de rupture de F sur K. Il existe donc $\alpha \in L$ tel que $F(\alpha) = 0$ et $L = K(\alpha)$. On note $m_\alpha : L \to L$ la multiplication par α, et on pose $\delta = \det(m_\alpha) \in K$.

1. Montrer l'identité $\delta^p = a^{[L:K]}$.
2. Montrer que $[L : K] = p$ et en déduire le résultat.

Exercice 15

1. Soit K une extension de degré 2 de $\mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe un entier relatif d, non nul et sans facteur carré, tel que K soit isomorphe au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.
2. Soient d et d' deux entiers relatifs distincts de 0 et 1, sans facteur carré et distincts ; montrer qu'il n'existe pas de morphisme de corps de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d'})$.

Exercice 16 Le but de cet exercice est de montrer que toute extension de degré 2 de $\mathbf{Q}$ est contenue dans un corps cyclotomique. Soit p un nombre premier et $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. Pour tout caractère $\chi : (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \to \mathbf{C}^*$, on définit la *somme de Gauß de* χ par

$$S(\chi) = \sum_{x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*} \chi(x) \cdot \zeta^x \in \mathbf{C}.$$

1. Déterminer $S(1)$.
2. Montrer que si $\chi \neq 1$ alors $|S(\chi)|^2 = p$.
3. Soit $\chi_p = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ le symbole de Legendre (on rappelle que $\chi_p(x) = 1$ si x est un carré dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$, et $\chi_p(x) = -1$ sinon). Montrer que
$$S(\chi_p) = \begin{cases} \pm\sqrt{p} & \text{si } p \equiv 1 \pmod 4 \\ \pm i\sqrt{p} & \text{si } p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$
4. Montrer que si K est une extension de degré 2 de $\mathbf{Q}$, alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que $K \subset \mathbf{Q}(e^{\frac{2i\pi}{N}})$.

Exercice 17

Soit P le polynôme $X^4 + X + 1$ de $\mathbf{Q}[X]$.

1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
2. Soit L un corps de rupture de P sur $\mathbf{Q}$. Montrer que L ne contient pas de sous-corps de degré 2 sur $\mathbf{Q}$. *Indication : raisonner par l'absurde en considérant la décomposition de P en facteurs irréductibles sur un tel sous-corps.*
3. Les racines de P sont-elles constructibles à la règle et au compas ?

Exercice 18 (Un exemple de réel transcendant)

1. Soient x un nombre réel, irrationnel et algébrique sur $\mathbf{Q}$, et d le degré du polynôme minimal de x sur $\mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif C tel que pour tout entier relatif p et tout entier strictement positif q on ait :
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}.$$
2. Soit α le nombre réel limite de la série convergente $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n!}}$. Montrer que α est transcendant.