ÉNS Lyon Rappels d'algèbre
Préparation à l'agrégation 2011-2012

Résultant, discriminant, fractions rationnelles

Exercice 1

Soient A un anneau, p, q des entiers ≥ 1, $P \in A[X]_{\leq p}$ et $Q \in A[X]_{\leq q}$. Montrer les formules suivantes :

(a) $\text{Rés}_{p,q}(P, Q) = (-1)^{pq}\text{Rés}_{q,p}(Q, P)$;

(b) Pour tout λ et μ dans A, $\text{Rés}_{p,q}(\lambda P, \mu Q) = \lambda^q \mu^p \text{Rés}_{p,q}(P, Q)$

(b) Pour tout $a \in A$, $\text{Rés}_{p,q}(P(X + a), Q(X + a)) = \text{Rés}_{p,q}(P, Q)$.

Exercice 2

Calculer le résultant par rapport à la variable X des polyômes $XY - 1$ et XY.

Exercice 3 Intersections de coniques

Déterminer l'intersection de C et C' dans les cas suivants :

(a) $C : x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ et $C' : 2x^2 + y^2 - y - 2 = 0$;

(b) $C : 2x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y = 0$ et $C' : 3x^2 + 2y^2 + 6xy = 0$.

Exercice 4 Équations implicites de courbes paramétrées

Déterminer une équation des courbes paramétrées $(x(t), y(t)) = (F(t), G(t))$ $(t \in \mathbf{R})$ suivantes :

(a) $F(t) = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$, $G(t) = 2t/(t^2 + 1)$;

(b) $F(t) = t^2 - 1$, $G(t) = t^3 + t^2$;

(c) $F(t) = t^2 + t + 1$, $G(t) = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$;

Exercice 5 Sommes de nombres algébriques

Soit α, β deux nombres algébriques, de polynômes minimaux respectifs P et Q sur $\mathbf{Q}$. On pose $R(X) = \text{Rés}_Y(P(Y), Q(X - Y)) \in \mathbf{Q}[X]$.

1. Montrer que R est un polynôme annulateur de $\alpha + \beta$.
2. Montrer que $R = \prod_{\alpha',\beta'} X - (\alpha' + \beta')$ où α' (resp. β') parcourt les racines de P (resp. Q) dans $\mathbf{C}$.
3. R est-il toujours le polynôme minimal de $\alpha + \beta$ sur $\mathbf{Q}$?

4. Trouver de manière analogue un polynôme annulateur de $\alpha\beta$.
5. *Application :* trouver le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ et donner toutes ses racines.

Exercice 6 Transformations de Tschirnhaus

Soit α un nombre algébrique, de polynôme minimal P sur $\mathbf{Q}$. Soit $Q \in \mathbf{Q}[X]$ non constant. On pose $R(X) = \mathrm{Rés}_Y(P(Y), X - Q(Y)) \in \mathbf{Q}[X]$.

1. Montrer que R est un polynôme annulateur de $Q(\alpha)$.
2. Montrer $R = \prod_{\alpha'} X - Q(\alpha')$ où α' parcourt les racines de P dans $\mathbf{C}$.
3. R est-il toujours le polynôme minimal de $Q(\alpha)$ sur $\mathbf{Q}$?
4. *Application* : Exprimer la racine réelle de l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$ en termes de radicaux (on pourra poser $y = x^2 + \lambda x$ avec λ bien choisi).

Exercice 7

Soient K un corps, p et q des entiers, $P = a_p X^p + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_q X^q + \cdots + b_1 X + b_0$ des polynômes à coefficients dans K de degré inférieur respectivement à p et q. On note $\widetilde{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k Y^{p-k}$ et $\widetilde{Q} = \sum_{l=0}^{q} b_l X^l Y^{q-l}$ les polynômes homogènes de $K[X, Y]$ respectivement associés à P et à Q. Montrer que $\mathrm{Rés}_{p,q}(P, Q) = 0$ si et seulement si $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ ont un zéro commun dans $K^2 - \{(0, 0)\}$.

Exercice 8

Soit K un corps, P un polynôme unitaire à coefficients dans K et Q un polynôme à coefficients dans K. Montrer que le resultant de P et Q est égal au déterminant de l'application K-linéaire de la K-algèbre de dimension finie $K[X]/(P)$ donnée par la multiplication par Q.

Exercice 9 Intersections de quadriques

Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, et $C \subset \mathbf{R}^3$ le cylindre d'équation $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. On pose $X = C \cap S$.

1. À l'aide de résultants, déterminer les projections orthogonales de X sur les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz).
2. Décrire de même $Y = C \cap C'$ avec $C' : x^2 + z^2 = 1$.

Exercice 10

Calculer $\mathrm{disc}(X^2 + bX + c)$ et $\mathrm{disc}(X^3 + pX + q)$.

Exercice 11

Soient d un entier supérieur ou égal à 2 et P un polynôme à coefficients réels, unitaire et de degré d. On note n le nombre de racines réelles de P.

1. Montrer que $\mathrm{disc}(P) > 0$ entraîne $n \equiv d \pmod 4$, et que $\mathrm{disc}(P) < 0$ entraîne $n \equiv d - 2 \pmod 4$.
2. Comment se traduisent ces résultats pour le polynôme $X^3 + pX + q$?

Exercice 12

Montrer que $\mathrm{disc}_p : K[X]_{\leq p} \to K$ est invariante sous $\mathrm{SL}_2(K)$.

Exercice 13

Soit $P, Q \in K[X]$ deux polynômes unitaires de degrés respectifs p et q. Exprimer $\mathrm{disc}(PQ)$ en fonction de $\mathrm{disc}(P)$, $\mathrm{disc}(Q)$ et $\mathrm{Rés}_{p,q}(P, Q)$.

Exercice 14

Calculer le discriminant du polynôme cyclotomique $\Phi_{p^n}(X)$, où p est un nombre premier (on pourra commencer par le cas $n = 1$).

Exercice 15 Un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Soit U l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui sont diagonalisables à valeurs propres simples.

1. En utilisant le discriminant, montrer que U est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
2. Montrer que U est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 16

Soit K un corps. Montrer que l'équation $F' = \frac{1}{X}$ n'a pas de solution dans $K(X)$. Qu'en est-il de l'équation $F' = F$?

Exercice 17

Soit K un corps. Montrer que l'application $\psi : F \mapsto \frac{F'}{F}$ est un morphisme du groupe multiplicatif $K(X)^*$ vers le groupe additif $K(X)$. Quel est son noyau ? (On distinguera suivant la caractéristique de K.)

Exercice 18 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$\frac{X^5+1}{X(X^2-1)^2} \text{ dans } \mathbf{Q}(X) ; \frac{1}{X^8+X^4+1} \text{ dans } \mathbf{R}(X) \text{ et } \mathbf{C}(X) ;$$
$$\frac{1}{X^n-1} \text{ dans } \mathbf{C}(X) ; \frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)} \text{ dans } \mathbf{Q}(X).$$

Exercice 19 En utilisant la dérivée logarithmique, décomposer la fraction rationnelle $F = X^{n-1}/(X^n-1)$ en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$.

Exercice 20

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbf{C}(X)$ de degré ≤ -2 (*i. e.* $\deg P - \deg Q \leq -2$). Montrer que la somme des résidus de F est nulle.

Exercice 21 Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant. En décomposant P'/P en éléments simples, montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Exercice 22

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul et $F = P'/P$.

(a) Exprimer P''/P en termes de F et F'.

(b) On suppose que P possède au moins deux racines et que P'' divise P. Montrer que P est à racines simples.

(c) On suppose que $P \in \mathbf{R}[X]$ possède au moins deux racines réelles et que P'' divise P. Montrer que P est scindé à racines simples dans $\mathbf{R}$.

Exercice 23

Soit L le corps $\mathbf{F}_p(X,Y)$ des fractions rationnelles à deux variables à coefficients dans $\mathbf{F}_p$, et soit K le sous-corps de L engendré par X^p et Y^p. Montrer que l'extension L/K est finie de degré p^2, mais n'est pas monogène.