Agrégation ENS Lyon
2011/2012

Formes bilinéaires, formes quadratiques

Dans toute cette feuille, les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Exercice 1 Soient V un espace vectoriel et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des formes linéaires sur V.

(a) Montrer que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ engendrent V^* ssi $\cap_{i=1}^n \ker \lambda_i = \{0\}$.

(b) Quel lien y a-t-il entre la dimension du sous-espace engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et celle de $\cap_{i=1}^n \ker \lambda_i$?

Exercice 2 Soit V, W deux k-espaces vectoriels et $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$. On note $f^* \in \mathrm{Hom}_k(W^*, V^*)$ l'application linéaire duale de f.

(a) Montrer

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f^* \text{ surjective} \qquad f \text{ surjective } \Leftrightarrow f^* \text{ injective.}$$

(b) Soit $(w_1, \dots, w_n)$ une base de W. On pose $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$ avec $\lambda_i \in V^*$. Montrer que l'image de f^* est le sous-espace engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

(c) En déduire $\dim \ker f + \dim \mathrm{im}\, f^* = \dim V$ puis $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^*)$.

Exercice 3 Soit V un k-espace vectoriel et W un sous-espace de V.

(a) Montrer que le dual de V/W s'identifie à $\{\lambda \in V^*; \lambda|_W = 0\}$.

(b) Soit $f \in \mathrm{End}(V)$. Montrer que W est stable par f si et seulement si $(V/W)^*$ est stable par $f^* \in \mathrm{End}(V^*)$.

Exercice 4 Soit V, W des espaces vectoriels de bases respectives $(v_i)_{1 \le i \le m}$ et $(w_j)_{1 \le j \le n}$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, de matrice M dans ces bases. Déterminer la matrice de f^* dans les bases duales $(w_j^*)_{1 \le j \le n}$ et $(v_i^*)_{1 \le i \le m}$.

Exercice 5 Soit λ une forme linéaire sur $M_n(k)$ telle que $\lambda(AB) = \lambda(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(k)$. Montrer que λ est proportionnelle à la trace.

Exercice 6 Soient E, F des k-espaces vectoriels. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in E^*$ et $\mu_1, \dots, \mu_r \in F^*$. Montrer que le rang de la forme bilinéaire $\Phi : E \times F \to k$ définie par $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(x)\mu_i(y)$ est $\le r$.

Exercice 7 Soit E un k-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to k$ une forme bilinéaire symétrique. On note $\Phi_E : E \to E^*$ l'application linéaire associée.

(a) Soit F un supplémentaire de $\ker \Phi_E$ dans E. Montrer que la restriction de Φ à F est non dégénérée.

(b) Réciproquement, soit F un sous-espace de E tel que $\Phi|_{F\times F}$ est non dégénérée. Montrer que F est inclus dans un supplémentaire de $\ker \Phi_E$.

Exercice 8 Soit E un k-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to k$ une forme bilinéaire symétrique.

(a) Si F_1, F_2 sont des sous-espaces de E, montrer $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

(b) Si de plus Φ est non dégénérée, montrer $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.

Exercice 9 Soit E un k-espace vectoriel. Montrer que $q : E \to k$ est une forme quadratique si et seulement si $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ ($\lambda \in k$, $x \in E$) et $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire sur E.

Exercice 10 Soit E un k-espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}$ des formes quadratiques sur E est un k-espace vectoriel.
2. Quelle est la dimension de $\mathcal{Q}$?
3. On suppose $k = \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des formes quadratiques positives (resp. définies positives) est un convexe de $\mathcal{Q}$.

Exercice 11 Si E est un k-espace vectoriel, deux formes quadratiques $q, q' : E \to k$ sont dites équivalentes s'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $q' = q \circ u$.

1. On suppose $k = \mathbf{C}$ et $E = \mathbf{C}^n$. Combien y a-t-il de classes d'équivalence de formes quadratiques sur E ?
2. Même question pour $k = \mathbf{R}$ et $E = \mathbf{R}^n$.
3. On suppose $k = \mathbf{Q}$ et $E = \mathbf{Q}^2$. Les formes quadratiques $q(x, y) = x^2+y^2$ et $q'(x, y) = x^2 + 2y^2$ sont-elles équivalentes ?
4. Montrer qu'il existe une infinité de formes quadratiques sur $\mathbf{Q}^2$ deux à deux non équivalentes.

Exercice 12

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer qu'il existe une forme quadratique q définie positive sur $\mathbf{R}^n$ telle que $q(gx) = q(x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in \mathbf{R}^n$.
2. En déduire que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$.