Agrégation ENS Lyon
2011/2012

Formes quadratiques, groupe orthogonal

Exercice 1 Soit q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ définie par

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \ne j}} x_i x_j.$$

1. Déterminer la signature de q.
2. Calculer le maximum de q sur le compact C donné par

$$C = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n ; x_1, \ldots, x_n \ge 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Exercice 2 Pour chacune des formes quadratiques suivantes, déterminer le rang, le noyau, et une base dans laquelle la matrice de la forme quadratique est diagonale.

(a) $q(x, y) = x^2 + xy - y^2$ sur $\mathbf{R}^2$;

(b) $q(x, y, z) = xy + yz$ sur $\mathbf{R}^3$;

(c) $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$ sur $\mathbf{R}^4$.

Exercice 3 On suppose $\mathrm{car}(k) \ne 2$. Soit $q : M_n(k) \to k$ l'application définie par $q(M) = \mathrm{Tr}(M \cdot {}^{\mathrm{t}}M)$.

(a) Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire.

(b) Lorsque $k = \mathbf{R}$, déterminer la signature de q.

(c) Mêmes questions pour $q(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ et $q(M) = (\mathrm{Tr}\, M)^2$.

Exercice 4 Soit q une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$, de signature (r, s). Montrer qu'il existe un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ totalement isotrope pour q, de dimension $\min(r, s)$ (on pourra commencer par le cas $n = 2$, $r = s = 1$).

Exercice 5 Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique positive R telle que $M = R^2$.

Exercice 6 Toute matrice symétrique complexe est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 Soit E un k-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to k$ une forme bilinéaire alternée.

1. On suppose $\dim_k E = 2$ et Φ non dégénérée. Montrer qu'il existe une base (e_1, e'_1) de E telle que

$$\operatorname{Mat}_{(e_1,e'_1)} \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose $\dim_k E = 2m$ ($m \geq 1$) et Φ non dégénérée. Montrer qu'il existe une base $(e_1, e'_1, \ldots, e_m, e'_m)$ de E telle que $\Phi(e_i, e_j) = \Phi(e'_i, e'_j) = 0$ et $\Phi(e_i, e'_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq m$.
3. Montrer que si E est de dimension impaire, alors Φ est nécessairement dégénérée (on pourra se restreindre au cas $\operatorname{car}(k) \neq 2$).

Exercice 8 (Décomposition polaire) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice S symétrique définie positive et une matrice Ω dans $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ telles que $A = S\Omega$.
2. En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ est connexe.
3. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'application $(S, \Omega) \mapsto S\Omega$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S} \times \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
4. Montrer que $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 9 Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie ($\operatorname{car}(k) \neq 2$) et q une forme quadratique non dégénérée sur E. Soit u une application de E dans E telle que $u(0) = 0$ et $q(u(x) - u(y)) = q(x - y)$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que $u \in O(q)$.

Exercice 10 Soit $u \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ et $F_u = \{x \in \mathbf{R}^n ; u(x) = x\}$.

1. Montrer que u est produit de k réflexions orthogonales, avec $k \leq n$.
2. Soit k_u le plus petit entier k tel que u est produit de k réflexions orthogonales. Montrer que $k_u = n - \dim F_u$.
3. Si n est impair et $u \in \mathrm{SO}(n, \mathbf{R})$, montrer que u possède une droite fixe.
4. Soit $u \in \mathrm{SO}(n, \mathbf{R})$ avec $n \geq 3$. Montrer que u est produit d'au plus n renversements orthogonaux (symétries orthogonales par rapport à un sous-espace de codimension 2 dans $\mathbf{R}^n$).

Exercice 11 Montrer que le centre de $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ est $\{1\}$.
Indication : utiliser 7.3.