Agrégation ENS Lyon
2011/2012

Algèbre linéaire

Exercice 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que A est normale si et seulement si A est diagonale.

Exercice 2 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique de A. Montrer que A est normale si et seulement si $\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$.

Indication : on pourra utiliser la norme de Schur $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}(AA^*)$.

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice hermitienne définie positive, et B une matrice hermitienne. Montrer que AB est diagonalisable à valeurs propres réelles.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel hermitien et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme hermitien. On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u. Montrer les égalités suivantes

$$\max_i |\lambda_i| = \|u\|$$
$$\lambda_1 = \inf_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$
$$\lambda_n = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

En déduire que les applications $u \mapsto \lambda_1(u)$ et $u \mapsto \lambda_n(u)$ sont continues sur l'espace $H(E)$ des endomorphismes hermitiens.

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel hermitien.

1. Montrer que tout endomorphisme de E est trigonalisable dans une base orthonormée de E.
2. Montrer que si $f, g \in \mathrm{End}(E)$ commutent, alors il existe une base orthonormée de E qui trigonalise f et g.

Exercice 6 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est antisymétrique (resp. hermitienne), alors $\exp(A)$ est orthogonale (resp. $\exp(iA)$ est unitaire). Réciproquement, toute matrice unitaire $U \in U_n$ est-elle de la forme $\exp(iA)$ avec A hermitienne ?

Exercice 7 **(Décomposition d'Iwasawa)**

1. Soit A une matrice hermitienne définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux positifs telle que $A = T^*T$.
2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple (U, T) avec U unitaire et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, tels que $A = UT$.