Géométrie algébrique – Examen final (*durée : 3 heures*)

NB : L'usage des notes de cours est autorisé.

Dans tout l'énoncé, k désigne un corps algébriquement clos.

Exercice 1 (Folium de Descartes)

On suppose dans cet exercice $k = \mathbb{C}$.

Soit $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ la courbe affine plane d'équation $3xy = x^3 + y^3$.

1. Montrer que C est irréductible (on pourra montrer que C ne contient aucune droite).
2. Montrer que C a un unique point singulier P_0, et déterminer la ou les directions tangentes de C en P_0.
3. En considérant la famille de droites passant par P_0, montrer que C est rationnelle et expliciter un paramétrage rationnel de C.

Exercice 2 (Quartique de Klein)

Soit $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ la quartique de Klein, d'équation $X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0$. On définit les fonctions rationnelles $x := X/Z$ et $y := Y/Z$ sur C.

1. Montrer que C est irréductible.
2. Montrer que C est lisse si et seulement si $\mathrm{car}(k) \neq 7$.

On suppose désormais $\mathrm{car}(k) \neq 7$.

3. Déterminer les zéros et les pôles des fonctions x et y sur C.
4. Déterminer une uniformisante de C au point $P = (0 : 0 : 1)$.
5. Montrer que P est un point d'inflexion de C, c'est-à-dire $m_P(C, T) \geq 3$, où T désigne la tangente de C en P.
6. Montrer que si $\mathrm{car}\ (k) \neq 3$, alors la droite $D : X+Y+Z = 0$ est tangente à C en deux points distincts de C (on dit que D est une *bitangente*).
7. Montrer que si $\mathrm{car}(k) = 3$, alors tout point de C est un point d'inflexion.
8. Quel est le genre de C ? Vérifier que la forme différentielle $\omega = \frac{dx}{x^3+3y^2}$ est régulière sur C.

Exercice 3 On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) \neq 3$.

Soit $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ une cubique projective irréductible admettant un *cusp*, c'est-à-dire un point singulier $P \in C$ en lequel C possède une unique direction tangente. Le but de cet exercice est de montrer que C est projectivement équivalente à la courbe $Y^2Z = X^3$.

On pose $I(C) = (F)$, et on note T l'unique direction tangente de C en P.

1. Montrer que l'on peut supposer $P = (0 : 0 : 1)$ et $T = V(Y)$.
2. Montrer alors que $F = aY^2Z - bX^3 - cX^2Y - dXY^2 - eY^3$.
3. À l'aide d'homographies bien choisies, montrer que l'on peut supposer successivement :
   (a) $a = b = 1$;
   (b) $c = 0$;
   (c) $d = e = 0$

   et en déduire le résultat.
4. Montrer que le groupe des homographies préservant la courbe $Y^2Z = X^3$ est isomorphe à $k^\times$.

Exercice 4

1. Montrer qu'une cubique projective $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ (non nécessairement irréductible), possédant au moins deux points singuliers, est réunion d'une droite et d'une conique. Que peut-on dire si C admet trois points singuliers ?
2. Montrer qu'une quartique projective (courbe de degré 4) possédant au moins quatre points singuliers est réunion de deux coniques.

Exercice 5 Soit $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ une courbe projective plane irréductible. On se donne n points lisses distincts $P_1, \ldots, P_n \in C$ et $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$.

1. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, montrer qu'il existe une droite projective D_i intersectant C transversalement au point P_i et ne passant par aucun des points P_j pour $j \neq i$.
2. Montrer qu'il existe une fonction rationnelle $f \in k(C)$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait $\mathrm{ord}_{P_i}(f) = m_i$.
   Indication : considérer une forme linéaire λ_i telle que $D_i = V(\lambda_i)$.