Géométrie algébrique – Examen partiel (*durée : 2 heures*)

NB : L'usage des notes de cours est autorisé.

Exercice 1 Le corps de base est $\mathbb{C}$.
Soit C la courbe du plan $\mathbb{A}^2$ d'équation :

$$x^2(1-x^2) = y^2 \ .$$

a) Montrer que C est irréductible.

b) Montrer que C a un unique point singulier et déterminer la ou les directions tangentes en ce point.

c) Montrer que la fonction coordonnée y est une uniformisante au point $(1,0)$. Exprimer le développement limité de x à l'ordre 4 au voisinage de $(1,0)$ en cette uniformisante.

d) Si $(a,b) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on note $C_{a,b}$ la courbe d'équation :

$$x^2 = ax + by \ .$$

Montrer que la droite $y = x$ est tangente à la courbe $C_{a,b}$ en $(0,0)$ si et seulement si $a + b = 0$.
Si $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, déterminer l'intersection de $C_{a,-a}$ avec C.

e) En déduire que la courbe C est rationnelle.

f) Montrer que $\mathbb{C}(C) = \mathbb{C}(\frac{x^2}{x-y})$.

Exercice 2 Soit k un corps algébriquement clos. On pose

$$A = \{P \in k[T] : P(0) = P(1)\}.$$

a) Montrer que A est une sous-k-algèbre de $k[T]$.

b) Montrer que $A = k[F,G]$ avec $F = T(T-1)$ et $G = T^2(T-1)$.

c) Déterminer une relation de dépendance algébrique entre F et G et en déduire une courbe affine plane irréductible C telle que $A \cong k[C]$.

d) Montrer que C est rationnelle.

e) Montrer que C possède un unique point singulier p_0 et que $C\backslash\{p_0\}$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1\backslash\{0,1\}$.

Exercice 3 Soit k un corps algébriquement clos.
Le but de cet exercice est de décrire les courbes rationnelles lisses dans $\mathbb{A}^2$.

a) Montrer que si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{A}^1$, la courbe $C_{x_1,\dots,x_n}$ d'équation $(x-x_1)\cdots(x-x_n)y = 1$ est un exemple de courbe plane irréductible, rationnelle et lisse. Vérifier que cette courbe est isomorphe à $\mathbb{A}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ et que $k[C_{x_1,\dots,x_n}] \cong k[t, f^{-1}]$ où $f = (t-x_1)\cdots(t-x_n)$.

Soit maintenant C une courbe affine plane irréductible lisse définie sur k. On suppose que C est rationnelle, de sorte qu'il existe une fonction rationnelle $t \in k(C)$ telle que $k(C) = k(t)$.

b) Si $a \in k$, on note

$$\mathscr{O}_a := \{f/g \ : \ f,g \in k[t] \ : \ g(a) \neq 0\}$$

et :

$$\mathscr{O}_\infty := \{f/g \ : \ f,g \in k[t], \deg f \leq \deg g\}$$

(ce sont des sous-anneaux de $k(t)$ de corps des fractions $k(t)$).
Soit v une valuation discrète sur $k(t)$ et A l'anneau de valuation associé. Montrer que si $v(t) \geq 0$, alors $A = \mathscr{O}_a$ pour un certain $a \in k$ et que si $v(t) < 0$, alors $A = \mathscr{O}_\infty$.
Indication : considérer $m \cap k[t]$ où m est l'idéal maximal de A.

c) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'anneaux de valuation discrète de corps des fractions $k(t)$ qui ne contiennent pas $k[C]$.
Indication : utiliser le fait que $k[C]$ est de type fini.

d) Après avoir vérifié que $k[C] = \bigcap_{x \in C} \mathscr{O}_{C,x}$, montrer que $k[C] = k[t, f^{-1}]$ pour un certain polynôme $f \in k[t]$ scindé à racines simples.

e) En déduire que C est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{A}^1$.