ÉNS Lyon M1 2011-2012

Géométrie algébrique élémentaire – TD 1

Exercice 1 *Soient k un corps et n un entier ≥ 1.*

a) *Montrer que* $\mathrm{Hom}_k(k[X_1,\ldots,X_n],k)$ *est en bijection avec k^n (où* Hom_k *désigne l'ensemble des morphismes de k-algèbres).*

b) *Soit A une partie de k^n. On note $k[A]$ l'ensemble des fonctions de A dans k qui sont restriction d'une fonction polynomiale sur k^n. Définir une application naturelle $A \to$* $\mathrm{Hom}_k(k[A],k)$.

c) *Cette application est-elle injective ? surjective ?*

Exercice 2 ***La topologie de Zariski***

Soit k un corps algébriquement clos et n un entier ≥ 1. Si S est une partie de $k[X_1,\ldots,X_n]$, on pose $V(S)=\{x\in k^n : \forall P\in S, P(x)=0\}$.

a) *Montrer que $V(S)=V(I)$, où I est l'idéal de $k[X_1,\ldots,X_n]$ engendré par S.*

b) *Montrer que $\mathcal{F} := \{V(I) : I \text{ idéal de } k[X_1,\ldots,X_n]\}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie sur k^n (appelée* topologie de Zariski*).*

c) *Montrer que k^n est un espace topologique* noethérien *: toute suite décroissante de fermés de k^n est stationnaire.*

d) *Que dire d'une réunion dénombrable croissante de fermés de k^n ?*

e) *Montrer que k^n est un espace topologique* irréductible *: il ne peut s'écrire comme réunion de deux fermés stricts.*

f) *En déduire que tout ouvert non vide de k^n est dense pour la topologie de Zariski.*

g) *Si I est un idéal de $k[X_1,...,X_n]$, vérifier que I est premier si et seulement si $V(I)$ est irréductible.*

h) *Si $n=1$, montrer que les fermés de la droite affine $\mathbb{A}^1$ sont les parties finies et $\mathbb{A}^1$.*

Exercice 3 *a)* *Montrer que $\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : y=e^x\}$ est dense dans $\mathbb{C}^2$ pour la topologie de Zariski.*

b) *Montrer que si k est algébriquement clos, les parties :*

$$\{(t^2,t^3)\ :\ t\in k\}\,,\ \{(t^2,t^3,t^5)\ :\ t\in k\}$$

de $\mathbb{A}^2$ et $\mathbb{A}^3$ sont des fermés de Zariski.

Exercice 4 ***Anneaux noethériens***

Si k est un corps, montrer que toute k-algèbre de type fini est noethérienne. Que dire de la réciproque ?

Exercice 5 ***Nullstellensatz***

Soit k un corps algébriquement clos et K une extension de k. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de $k[X_1,\ldots,X_n]$. On suppose que les f_i ont un zéro commun dans K^n. En utilisant le Nullstellensatz, montrer que les f_i ont un zéro commun dans k^n. Le résultat subsiste-t-il si k n'est pas algébriquement clos ?

Exercice 6 ***Normalisation de Noether***

Soit k un corps algébriquement clos. Pour chaque k-algèbre A ci-dessous, trouver $x_1,\ldots,x_n\in A$ algébriquement indépendants sur k tels que A est entière sur $k[x_1,\ldots,x_n]$ (théorème de normalisation d'Emmy Noether).

$$A=k[X,\frac{1}{X}]\,,$$

$$A=k[X^2,X^3]\,,$$

$$A=k[X,Y]/(X^2+Y^2-1)\,,$$

$$A=k[X,Y,Z]/(XYZ-1)\ .$$

Exercice 7 ***Algèbres d'invariants***

Soit k un corps algébriquement clos et $n\geq 1$. Soit $\psi : k^n \to \mathrm{Hom}_k(k[X_1,\ldots,X_n]^{\mathfrak{S}_n},k)$ l'application naturelle donnée par l'évaluation des polynômes.

a) *Montrer que $\psi(x)=\psi(x') \Leftrightarrow \exists\sigma\in\mathfrak{S}_n : x'=\sigma(x)$.*

b) *Montrer que ψ est surjective et en déduire une bijection*

$$\overline{\psi} : k^n/\mathfrak{S}_n \overset{\cong}{\to} \mathrm{Hom}_k(k[X_1,\ldots,X_n]^{\mathfrak{S}_n},k).$$

c) *Montrer que $\overline{\psi}$ permet de définir une topologie de Zariski sur $k^n/\mathfrak{S}_n$, puis que cette topologie est le quotient de la topologie de Zariski sur k^n.*

d) (Plus difficile) *Montrer que ces résultats restent valables si l'on remplace $\mathfrak{S}_n$ par un sous-groupe fini G de $\mathfrak{S}_n$ (pour le 1er point, on pourra considérer le polynôme $\prod_{\sigma\in G} T-P^\sigma$, où $P\in k[X_1,\ldots,X_n]$, et pour le 2e point, on pourra considérer $\prod_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} T-P^\sigma$, où $P\in k[X_1,\ldots,X_n]^G$).*

Remarque : *cet exercice permet de donner un sens un peu plus précis à l'affirmation suivante : « $k[X_1,\ldots,X_n]^G$ est l'algèbre des fonctions polynomiales sur k^n/G ».*

Exercice 8 *Montrer que si K est un corps qui est une $\mathbb{Z}-$algèbre de type fini, alors K est fini indication : si K contient $\mathbb{Q}$, alors montrer que K est entier sur $\mathbb{Z}[1/d]$ pour un certain entier d et en déduire une contradiction.*

Exercice 9 *Soit k un corps algébriquement clos. En utilisant le théorème des zéros de Hilbert, montrer que pour tout idéal I de $k[X_1, ..., X_n]$,*

$$\sqrt{I} = \bigcap_m m$$

(réunion sur les idéaux maximaux m qui contiennent I). Montrer que c'est encore vrai pour un corps k quelconque.

Exercice 10 *Soit k un corps. Soient $F, G \in k[X, Y]$ deux polynômes premiers entre eux.*

a) *Montrer qu'il existe $A, B \in k[X, Y]$ tels que*

$$0 \neq AF + BG \in k[X] \ .$$

b) *En déduire que $(F = 0) \cap (G = 0)$ est fini. Montrer aussi que $k[X, Y]/(F, G)$ est de dimension finie sur K.*

c) *Soit M un idéal premier non nul de $K[X, Y]$ qui n'est pas principal. Montrer que M est maximal.*

d) *Soit m un idéal maximal de $\mathbb{R}[X, Y]$. Montrer qu'il existe un polynôme P réel en une variable, irréductible et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$m = (P(X), Y + \lambda X + \mu) \text{ ou } (P(Y), X + \lambda Y + \mu).$$

Exercice 11 *Soit k un corps algébriquement clos. Une hypersurface de $\mathbb{A}^n$ est une partie de la forme $V(F)$ où $F \in k[X_1, ..., X_n]$.*

a) *Soit H une hypersurface de $\mathbb{A}^n$ définie par un polynôme irréductible F. Soit $P \in k[X_1, ..., X_n]$ un polynôme qui s'annule sur H. Montrer que F divise P.*

b) *Soit $F \in k[X_1, ..., X_n]$. Soit $F = P_1^{n_1} ... P_r^{n_r}$ la factorisation de F en produits d'irréductibles (avec des P_i deux à deux premiers entre eux). Montrer que $\sqrt{(F)} = (P_1 ... P_r)$.*

Exercice 12 *Soit k un corps algébriquement clos. Soient $F_1 := V(Y - X^2), F_2 = V(Y), F_3 = (Y - 1)$.*

a) *Montrer que $I(F_1) + I(F_2) \underset{\neq}{\subset} I(F_1 \cap F_2)$ et que l'anneau $\frac{k[X,Y]}{I(F_1)+I(F_2)}$ n'est pas réduit.*

b) *Comparer $I(F_1) + I(F_3)$ et $I(F_1 \cap F_3)$.*

Exercice 13 ***Noethérianité des anneaux d'invariants***

a) *Soit $A \subset B$ des anneaux et $\varphi : B \to A$ un morphisme de A-modules tel que $\varphi|_A = \mathrm{id}_A$. Montrer que si B est noethérien, alors A l'est aussi.*

b) *Soit G un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ la sous-k-algèbre de $k[X_1, \ldots, X_n]$ formée des polynômes G-invariants. Déduire de la question précédente que si k est de caractéristique 0, alors $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ est noethérienne.*

Remarque : *un théorème célèbre de David Hilbert en 1890 entraîne que si $\mathrm{Card}(G)$ n'est pas divisible par car (k), alors $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ est une k-algèbre de type fini.*