Géométrie algébrique élémentaire – TD 2

Dans toute cette feuille, on suppose que k est un corps algébriquement clos.

Exercice 1 ***Degré de transcendance***
Déterminer le degré de transcendance des k-algèbres intègres suivantes :

$$A = k[X_1, \ldots, X_n];$$

$$A = k[X, \frac{1}{X}];$$

$$A = k[X + Y, XY];$$

$$A = k[X, X^2Y, X^3Y^2, \ldots].$$

Montrer que si P est un polynôme irréductible de $k[X_1, \ldots, X_n]$, alors le degré de transcendance de $k[X_1, \ldots, X_n]/(P)$ est égal à $n - 1$.

Exercice 2 ***Normalisation de Noether***
Pour chaque k-algèbre ci-dessous, trouver $x_1, \ldots, x_n \in A$ algébriquement indépendants sur k tels que A est entière sur $k[x_1, \ldots, x_n]$ (théorème de normalisation d'Emmy Noether).

$$A = k[X^2, X^3];$$

$$A = k[X, \frac{1}{X}];$$

$$A = k[X, Y, Z]/(XYZ - 1);$$

$$A = k[X, Y, Z]/(XY + XZ + YZ).$$

Exercice 3 *Soit V un fermé algébrique de $\mathbb{A}^n$. On suppose que V est irréductible, c'est-à-dire que la k-algèbre $k[V]$ est intègre. À l'aide de la normalisation de Noether, montrer qu'il existe un entier $0 \leq d \leq n$ et une application k-linéaire $\pi : k^n \to k^d$ telle que l'application $\pi|_V : V \to k^d$ soit surjective et à fibres finies.*

(On dit que $\pi|_V$ est un morphisme fini).

Exercice 4 *Soit V un fermé algébrique de $\mathbb{A}^n$.*

a) Montrer que V est fini si et seulement si $k[V]$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

b) Montrer que dans ce cas, on a $\dim_k k[V] = \mathrm{card}(V)$.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 9 du TD 1 : le radical d'un idéal I de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est égal à l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

Exercice 5 *Soit V un fermé algébrique de $\mathbb{A}^n$. Soit $\varphi : k[V] \to k$ un morphisme de k-algèbres. Montrer qu'il existe un unique point $x \in V$ tel que φ soit le morphisme d'évaluation en x.*

Exercice 6 *Soient V et W des fermés algébriques de $\mathbb{A}^m$ et $\mathbb{A}^n$, respectivement.*

a) Montrer que l'application $f \mapsto f^*$ définit une bijection de l'ensemble des applications régulières $V \to W$ dans l'ensemble des morphismes de k-algèbres $k[W] \to k[V]$.

b) En déduire que V et W sont isomorphes si et seulement si les k-algèbres $k[V]$ et $k[W]$ le sont.

Exercice 7 *Soient V et W des fermés algébriques de $\mathbb{A}^m$ et $\mathbb{A}^n$, respectivement.*

a) Montrer que $V \times W$ est un fermé algébrique de $\mathbb{A}^{m+n}$.

b) Montrer l'isomorphisme de k-algèbres $k[V \times W] \cong k[V] \otimes_k k[W]$.

Exercice 8 *Soit C une courbe affine plane définie sur k. Montrer que C s'écrit, de manière unique, comme réunion finie de courbes affines planes irréductibles.*

Exercice 9 *Montrer que tout fermé algébrique de $\mathbb{A}^2$ est soit fini, soit la réunion d'une courbe affine plane et d'un ensemble fini.*

Exercice 10 *Montrer que la courbe affine plane $C = V(Y - X^2)$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1$.*

Exercice 11 *On note $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$ l'application $t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$ et on pose $C = f(\mathbb{A}^1)$.*

a) Montrer que C est un fermé algébrique de $\mathbb{A}^3$.

b) Montrer que $f^* : k[C] \to k[T]$ est injective.

c) Quelle est l'image de f^* ?

d) Montrer que le degré de transcendance de $k[C]$ sur k est égal à 1.

e) Montrer que C n'est pas isomorphe à une courbe affine plane.

Exercice 12 *On considère la courbe affine plane $C_a = V(Y^2 - X^3 - aX - 1)$ pour $a \in k$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a, a' \in k$ pour que C_a et $C_{a'}$ soient affinement équivalentes dans $\mathbb{A}^2$ (c'est-à-dire qu'il existe $g \in \mathrm{GL}_2(k)$ tel que $C_{a'}$ soit une translatée de $g(C_a)$).*