Géométrie algébrique élémentaire – TD 3

Exercice 1 *a)* *Soit A un anneau commutatif. Soit B un $A-$module de type fini. Soit m un idéal de A. Montrer que si $mB = B$, alors il existe $x \in m$ tel que $(1 + x)B = 0$.*

b) *On suppose que $A \subseteq B$ sont deux $k-$algèbres de type fini intègres et que B est entier sur A. Montrer que si m est un idéal maximal de A, il existe un idéal maximal m' de B tel que $m' \cap A = m$.*

c) *Application : Soit X un sous-ensemble algébrique irréductible de k^n (k algébriquement clos). On suppose que $f_1, ..., f_d \in k[X]$ sont des applications régulières algébriquement indépendantes telles que l'extension $k[f_1, ..., f_d] \subseteq k[X]$ est entière. Montrer que l'application :*

$$X \to \mathbb{A}^d$$

est surjective à fibres finies.

Exercice 2 *Soit C la courbe déquation $y^2 = x^3$. Montrer que c'est une courbe irréductible et donner le domaine de définition de $f = \frac{y}{x}$.*

Exercice 3 *Soit C une courbe affine plane sur un corps algébriquement clos k. Si $x \in C$, on note $\mathscr{O}_{C,x}$ le localisé de $k[C]$ en l'idéal maximal m_x associé à x.*

a) *Montrer que $\mathscr{O}_{C,x}/m_x \simeq k$.*

b) *Montrer que l'anneau $\mathscr{O}_{C,x}$ est intègre $\Leftrightarrow$ x est sur une seule composante irréductible de C.*

Exercice 4 *a)* *Soit $f \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle non constante.*

Si $f = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes premiers entre eux, on pose :

$$\deg f = \max\{\deg p, \deg q\} \ .$$

Montrer que $\deg f$ est le nombre de zéros de f (comptés avec multiplicités et avec le zéro éventuel en ∞).

b) *Montrer que $[\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(f)] = \deg f$. En déduire le degré de l'extension $\mathbb{C}(X - 1/X) \subseteq \mathbb{C}(X)$.*

Exercice 5 *a)* *Soient a, b, c 3 polynômes premiers entre eux tels que $a + b = c$.*

Montrer le théorème de Mason :

$$\max\{\deg a, \deg b, \deg c\} \leq N - 1$$

où N est le nombre de racines distinctes de a, b, c. Indication : poser $f = a/c, g = b/c$ et montrer que $b/a = -\frac{f'/f}{g'/g}$.

b) *On suppose que f, g sont des fractions rationnelles non constantes. Montrer que l'on ne peut pas avoir $f^2 = g^3 - g$ (indication : considérer f/g).*

c) *Montrer que la courbe $y^2 = x^3 - x$ n'a pas de paramétrisation rationnelle.*

d) *Montrer que si $n \geq 3$, la courbe $x^n + y^n = 1$ n'a pas de paramétrisation rationnelle.*

Exercice 6 *a)* *Soit C la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Trouver une paramétrisation rationnelle de C en considérant la droite d'équation $y = t(x + 1)$. Quel est le domaine de définition de $y/(x + 1)$? Montrer que le paramétrage ci-dessus induit un isomorphisme : $\mathbb{A}^1 \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C} \setminus \{(-1, 0)\}$.*

Montrer que le paramétrage : $(t/2 + 2/t, t/(2i) - 2i/t)$ induit un isomorphisme :

$$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to C \ .$$

b) *Soit C la courbe d'équation $y^2 = x^3 + x^2$. Trouver une paramétrisation rationnelle de C en considérant la droite d'équation $y = tx$.*

c) *Même question avec le folium de Descartes d'équation : $x^3 + y^3 = xy$.*

d) *Plus généralement si f_n et f_{n+1} sont des polynômes homogènes de degrés n et $n + 1$ en x, y, la courbe d'équation $f_n + f_{n+1} = 0$ admet une paramétrisation rationnelle.*

e) *Soit C la courbe d'équation*

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2) \ .$$

Montrer que $k(C) = k(t)$ avec $t = \frac{x^2+y^2}{x-y}$. En déduire une paramétrisation rationnelle de C.

Exercice 7 ***Lemniscate***

a) *Déterminer une équation de la lemniscate C définie par $t \mapsto (\frac{t+t^3}{1+t^4}, \frac{t-t^3}{1+t^4})$.*

b) *Déterminer le domaine de définition de la fonction rationnelle $t \in k(C)$.*

Exercice 8 *Pour chacune des courbes paramétrées suivantes, déterminer une équation irréductible et préciser les points à exclure pour obtenir un paramétrage bijectif :*

$t \mapsto (t^2, t^2+t^3)$; $t \mapsto (t^2, t^2+t^4)$; $t \mapsto (t^2+t, t^2+t^3)$

$t \mapsto (\frac{1}{t^2+1}, \frac{t}{t^2-1})$; $t \mapsto (\frac{t^2+1}{t}, \frac{t-1}{t^2})$; $t \mapsto (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3})$.