Géométrie algébrique élémentaire – TD 4

Dans toute cette feuille, on suppose que k est un corps algébriquement clos.

Exercice 1 *Trouver une paramétrisation rationnelle des coniques suivantes :*

a) $C : x^2 - y^2 = 1$ *;*

b) $C : x^2 - xy + y^2 - y - 1 = 0$.

Dans chacun des cas, on précisera les points à exclure pour obtenir un paramétrage bijectif.

Exercice 2 *Soit* $F \in k[X, Y]$ *un polynôme non constant et* $C = V(F)$ *la courbe affine plane définie par* F*. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $I(C) = (F)$.
2. F *est sans facteur carré dans* $k[X, Y]$.
3. *On a* $\operatorname{pgcd}(F, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}) = 1$ *dans* $k[X, Y]$.

Exercice 3 *Soit* $F \in k[X, Y]$ *un polynôme non constant (ayant éventuellement des facteurs carrés). Montrer que si* $P \in V(F)$ *vérifie* $(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y})(P) \neq (0, 0)$*, alors* P *est un point lisse de* $V(F)$*. Que dire de la réciproque ?*

Montrer que si $(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y})(P) \neq (0, 0)$ *alors la tangente de* $V(F)$ *en* P *est encore donnée par* $\frac{\partial F}{\partial X}(P) \cdot (x - x_P) + \frac{\partial F}{\partial Y})(P) \cdot (y - y_P) = 0$.

Exercice 4 *Soit* C *une courbe affine plane. Montrer que l'ensemble des points singuliers de* C *est fini.*

Exercice 5 *Déterminer les points singuliers des courbes suivantes (pour chaque point singulier, on précisera la multiplicité ainsi que la ou les directions tangentes à la courbe) :*

a) $C : x^2y + xy^2 = x^4$ *;*

b) $C : x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$ *;*

c) $C : x^2 = x^4 + y^4$ *;*

d) $C : x^6 + y^6 = xy$ *;*

e) $C : x^3 = y^2 + x^4 + y^4$ *;*

f) $C : (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0$ *;*

Exercice 6 *On suppose dans cet exercice* car $(k) \neq 2$*. Soit* $C : x^2 + y^2 = 1$ *et* $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{A}^2$*. En distnguant suivant le point* P_0*, déterminer le nombre de tangentes de* C *qui passent par* P_0.

Généraliser ce résultat de la manière suivante : si C *est une conique affine irréductible, alors par un point situé hors de* C *passent en général exactement deux tangentes de* C.