Géométrie algébrique – TD 5

Dans toute la feuille, on fixe un corps k algébriquement clos.

Exercice 1 – Un anneau intégralement clos non factoriel

On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) \neq 2$ et on considère la cubique $C : y^2 = x^3 - x$.

1. Montrer que C est irréductible.
2. Montrer que tout $f \in k[C]$ s'écrit de manière unique $f = P(x) + Q(x)y$ avec $P, Q \in k[X]$.
3. Soit σ l'involution de C définie par $\sigma(x, y) = (x, -y)$. Montrer que σ est une application régulière et que σ^* est un automorphisme de la k-algèbre $k[C]$. Que peut-on dire d'un élément de $k[C]$ fixé par σ^* ?
4. Montrer que $k[C]^\times = k^\times$ (on pourra considérer l'application $N : k[C] \to k[x]$ définie par $N(f) = f \cdot \sigma^*(f)$).
5. Montrer que x et y sont irréductibles et non associés dans $k[C]$ (on pourra remarquer que si $f|g$ dans $k[C]$ alors $N(f)|N(g)$ dans $k[x]$).
6. Montrer que le point $P = (0, 0)$ est lisse, mais que l'idéal maximal $\mathfrak{m} = (x, y)$ de $k[C]$ n'est pas principal.
7. Montrer que $k[C]$ est intégralement clos, mais n'est pas factoriel.

Exercice 2 – Désingularisation d'une cubique

On considère la cubique $C : y^2 = x^3 - x^2$.

1. Montrer que C est irréductible.
2. Montrer que C est rationnelle (on pourra considérer la droite de pente t passant par le point singulier $(0, 0)$ de C).
3. Montrer l'isomorphisme de k-algèbres $k[C] \cong k[T^2 - T, T^3 - T^2]$.
4. Décrire la désingularisation de C.

Exercice 3 – Désingularisation d'une quartique

On considère la quartique $C : y^2 = x^3 - x^4$.

1. Montrer que C est irréductible.
2. Montrer que $(0, 0)$ est le seul point singulier de C. Quelle est sa multiplicité ? la ou les direction(s) tangente(s) en ce point ?
3. Déterminer le domaine de définition de $f = \frac{y}{x}$.
4. Montrer que f est entière sur $k[C]$.
5. Trouver une courbe affine plane C' telle que $k[C'] \cong k[x, f]$.
6. Montrer que C' est lisse. Que peut-on en déduire sur la clôture intégrale de $k[C]$ dans $k(C)$?
7. Décrire la désingularisation de C.
8. Montrer que C' est rationnelle et en déduire que C est rationnelle.

Exercice 4 – Détermination d'une uniformisante en un point lisse

Soit C une courbe affine plane. On pose $I(C) = (F)$ avec $F \in k[X, Y]$.

Soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un point lisse de C. Montrer que si $\frac{\partial F}{\partial X}(P_0) \neq 0$ (resp. $\frac{\partial F}{\partial Y}(P_0) \neq 0$), alors $\mathrm{ord}_{P_0}(y - y_0) = 1$ (resp. $\mathrm{ord}_{P_0}(x - x_0) = 1$).

Indication. On pourra montrer que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est engendré par la classe de $y - y_0$ (resp. $x - x_0$).

Exercice 5 – Calculs d'ordres d'annulation

On considère la courbe $C : y^2 + y = x^3 - x^2$.

1. Montrer que le point $P = (0, 0)$ est lisse et calculer l'ordre d'annulation en P des fonctions x, y et $y + x^2$.
2. Montrer que l'application régulière $f = y + x^2 + xy$ s'annule à l'ordre 5 en P et ne s'annule en aucun autre point de C.

Exercice 6 – Bitangentes

On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit $P \in k[X]$ non constant.

1. À quelle condition sur P la courbe affine plane $C = V(Y^2 - P(X))$ est-elle lisse ?
2. On prend $P = X^4 + 1$. Trouver les droites passant par $(0, 0)$ et tangentes à C.
3. On prend $P = X^4 + 1$. Déterminer les bitangentes de C (droites tangentes en deux points distints de C).
4. Pour un polynôme P de degré 4 « général », combien y a-t-il de droites passant par $(0, 0)$ et tangentes à C ? combien C admet-elle de bitangentes ?