Géométrie algébrique élémentaire – TD 6

Exercice 1 (Anneaux de Dedekind) Montrer que si C est une courbe algébrique plane, affine, irréductible, alors tout idéal premier non nul de $k[C]$ est maximal.

Indications :

a) Soient $A \subseteq B$ deux anneaux intègres tels que B est entier sur A. Montrer que A est un corps $\Leftrightarrow$ B est un corps.

b) D'après le théorème de normalisation de Nöther, il existe $t \in k[C]$ tel que $k[C]$ est entier sur $k[t]$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non nul de $k[C]$, montrer que $\mathfrak{p} \cap k[t]$ est un idéal premier non nul de $k[t]$ (considérer les localisés $S^{-1}k[C]$ et $S^{-1}k[t]$ où $S = k[t] \setminus \mathfrak{p}$).

c) Conclure.

En déduire que C est lisse $\Leftrightarrow$ $k[C]$ est un anneau de Dedekind.

Exercice 2 a) Soit X un fermé algébrique de $\mathbb{A}^n$. Soit $f : X \to k$ une fonction.

On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert de X :

$$X = \cup_i X_i$$

et des $a_i, b_i \in k[X]$ tels que pour tout i :

$$\forall x \in X_i,\ b_i(x) \neq 0 \text{ et } f(x) = \frac{a_i(x)}{b_i(x)}\ .$$

Montrer que $f \in k[X]$ (*indication : considérer l'idéal* $\{h \in k[X]\ :\ hf \in k[X]\}$ *et utiliser le théorème des zéros de Hilbert.*)

b) Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{A}^1$. Montrer que l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathbb{A}^1 \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ est $k[t, f^{-1}]$ où $f = (t - x_1)...(t - x_n)$.

c) Montrer que le groupe $k[t, f^{-1}]^\times / k^\times$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. En déduire que si $\mathbb{A}^1 \setminus \{x_1, ..., x_m\} \simeq \mathbb{A}^1 \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ alors $m = n$.

d) Déterminer l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 3 a) Montrer que la courbe d'équation :

$$y^2 - y = x^3$$

est lisse en caractéristique $\neq 3$.

b) Montrer que x est une uniformisante en $(0,0)$ et exprimer le développement limité de y à l'ordre 9 en x. Montrer que le développement limité complet de y est la série de Taylor de $\frac{1-\sqrt{1+4x^3}}{2}$.

Exercice 4 (Exemple de désingularisation) Soit C la courbe d'équation $y^2 = x^3 + x^2$.

a) Montrer que C est irréductible et déterminer ses points singuliers de C ?

b) Montrer que la fermeture intégrale de $k[C]$ dans son corps des fractions est $k[y/x]$.

c) Montrer que le morphisme $\phi : \mathbb{A}^1 \to k[C]$, $t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ induit un isomorphisme entre $k[C]$ et l'algèbre de polynômes $p(t) \in k[t]$ tels que $p(1) = p(-1)$.

d) Montrer que la restriction :$\phi : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to C \setminus \{(0,0)\}$ est un isomorphisme.

e) Déterminer les automorphismes de $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ puis ceux de C.

Exercice 5 Soit C une courbe plane rationnelle lisse et irréductible.

a) Montrer que si $x_1, ..., x_n \in \mathbb{A}^1$, la courbe d'équation $(x-x_1)...(x-x_n)y = 1$ est un exemple. Vérifier que cette courbe est isomorphe à $\mathbb{A}^1 \setminus \{x_1, ..., x_n\}$.

b) Montrer qu'il existe $t \in k(C)$ tel que $k(C) = k(t)$.

c) Décrire tous les anneaux de valuation discrète $\mathcal{O} \subseteq k(t)$ tels que $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}) = k(t)$ (vérifier qu'ils sont en bijection avec $\mathbb{P}^1$).

d) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'anneaux de valuation discrète $\mathcal{O}$ de corps des fractions $k(t)$ qui contiennent $k[C]$.

e) Après avoir vérifié que $k[C] = \bigcap_{x \in C} \mathcal{O}_{C,x}$, montrer que $k[C] = k[t, f^{-1}]$ pour un certain polynôme $f \in k[t]$ scindé à racines simples.

f) En déduire que C est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{A}^1$.

Exercice 6 a) Déterminer les points à l'infini des courbes suivantes :

$$y^2 = x^3,\ y^2 = x^2 + x^3,\ y^2(1-x) = x^3,\ ,y^2 - y = x^3,\ y^2 = x^3 - x,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

b) Soit Γ une courbe affine plane de degré d. Montrer que Γ a au moins 1 et au plus d point(s) à l'infini (*montrer que si f_d est la composante homogène de degré d de f (le polynôme minimal de Γ), ce sont les points* $(0 : a : b)$ *tels que* $f_d(a, b) = 0$).

Exercice 7 On dit qu'une application $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ de la forme : $[x] \mapsto [g(x)]$ est une *transformation projective.*

a) Soit C une conique de $\mathbb{P}^2$ (*i.e.* une courbe projective de degré 2). Montrer qu'il existe une transformation projective de $\mathbb{P}^2$ qui envoie C sur une des coniques suivantes :

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0,\ x_0^2 + x_1^2 = 0,\ x_0^2 = 0$$

(on suppose que la caractéristique du corps est $\neq 2$).

b) Montrer que l'application $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$

$$(u : v) \mapsto (2uv : u^2 - v^2 : i(u^2 + v^2))$$

donne une bijection entre $\mathbb{P}^1$ et la conique $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Figure 1 – $y^2 - y = x^3$

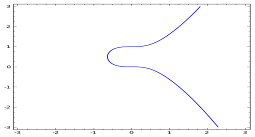

Figure 2 – $y^2 = x^3 + x^2$