Géométrie algébrique – TD 7

Dans toute la feuille, on fixe un corps k algébriquement clos.

Exercice 1

Montrer que la topologie de Zariski sur $\mathbf{P}^n(k)$ est noethérienne : toute suite décroissante de fermés algébriques est stationnaire.

Exercice 2

Soit H une hypersurface de $\mathbf{P}^n(k)$. Montrer que toute droite projective de $\mathbf{P}^n$ rencontre H.

Exercice 3

Dans cet exercice, on identifie $\mathbf{A}^n(k)$ à une partie de $\mathbf{P}^n(k)$ au moyen de l'application $j : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$.

1. Montrer que $\mathbf{A}^n(k)$ est un ouvert dense de $\mathbf{P}^n(k)$.
2. Montrer que la topologie de Zariski sur $\mathbf{P}^n(k)$ induit la topologie de Zariski sur $\mathbf{A}^n(k)$.

Exercice 4 – Points à l'infini

1. Déterminer les points à l'infini des courbes suivantes :

$$y^2 = x^3,\ y^2 - y = x^3,\ y^2(1-x) = x^3,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x^n + y^n = 1.$$

2. Soit Γ une courbe affine plane de degré d. Montrer que Γ a au moins 1 et au plus d point(s) à l'infini (*montrer que si f_d est la composante homogène de degré d de f (le polynôme minimal de Γ), ce sont les points* $(0 : a : b)$ *tels que* $f_d(a, b) = 0$).

Exercice 5 – Courbe rationnelle normale dans $\mathbf{P}^2$

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{P}^1(k) &\to \mathbf{P}^2(k) \\ (x : y) &\mapsto (x^2 : xy : y^2) \end{aligned}$$

   est bien définie et injective.
2. Montrer que $C = f(\mathbf{P}^1)$ est une courbe projective plane.
3. Déterminer un générateur de l'idéal homogène $I(C)$.
4. Montrer qu'une droite projective coupe C en 1 ou 2 points.

Exercice 6 – Courbe rationnelle normale dans $\mathbf{P}^n$

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{P}^1(k) &\to \mathbf{P}^n(k) \\ (x : y) &\mapsto (x^n : x^{n-1}y : \ldots : y^n) \end{aligned}$$

   est bien définie et injective.
2. Montrer que $C = f(\mathbf{P}^1)$ est un fermé algébrique de $\mathbf{P}^n$.
3. Montrer que $I(C)$ est le noyau du morphisme de k-algèbres $\varphi : k[X_0, \ldots, X_n] \to k[X, Y]$ défini par $\varphi(X_i) = X^{n-i}Y^i$.
4. Montrer que $I(C)$ est engendré par des polynômes homogènes de degré 2.

Exercice 7 – Surface de Veronese

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{P}^2(k) &\to \mathbf{P}^5(k) \\ (x : y : z) &\mapsto (x^2 : y^2 : z^2 : xy : xz : yz) \end{aligned}$$

   est bien définie et injective.
2. Montrer que $S = f(\mathbf{P}^2)$ est un fermé algébrique de $\mathbf{P}^5$.
3. Déterminer des générateurs de $I(S)$.

Exercice 8 – Un exemple de plongement de Plücker

On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit $G_{2,4} = G_{2,4}(k)$ l'ensemble des plans vectoriels de k^4.

1. Soit $P \in G_{2,4}$ et (e_1, e_2) une base de P. Montrer que l'image de $e_1 \wedge e_2$ dans $\mathbf{P}(\bigwedge^2 k^4)$ est bien définie et ne dépend que de P. On la note $f(P)$.
2. Montrer que l'application $f : G_{2,4} \to \mathbf{P}(\bigwedge^2 k^4)$ définie ci-dessus est injective.
3. Montrer que tout élément de $\bigwedge^2 k^3$ est de la forme $x \wedge y$ avec $x, y \in k^3$, puis que tout élément de $\bigwedge^2 k^4$ est de la forme $x \wedge y + z \wedge t$ avec $x, y, z, t \in k^4$.
4. Soit $v \in \mathbf{P}(\bigwedge^2 k^4)$ et $\widetilde{v} \in (\bigwedge^2 k^4) \backslash \{0\}$ un représentant de v. Montrer que v est dans l'image de f si et seulement si $\widetilde{v} \wedge \widetilde{v} = 0$.
5. En déduire que l'image de f est un fermé algébrique de $\mathbf{P}(\bigwedge^2 k^4) \cong \mathbf{P}^5(k)$.

Généralisation : si $d \leq n$ sont des entiers, la grassmannienne $G_{d,n}$ formée des sous-espaces vectoriels de dimension d de k^n s'identifie à un fermé algébrique de l'espace projectif $\mathbf{P}(\bigwedge^d k^n)$.