TD 8 (Géométrie projective)

Soit k un corps *quelconque*.

Exercice 1

Soit $\mathbf{P}(E)$ un espace projectif de dimension n sur k. Soient V et W des sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}(E)$ tels que $\dim V + \dim W \geq n$.

1. Montrer que $V \cap W$ est non vide et est un sous-espace projectif de $\mathbf{P}(E)$.
2. Montrer que la codimension de $V \cap W$ dans $\mathbf{P}(E)$ est inférieure ou égale à la somme des codimensions de V et W.

Exercice 2

Soit $\mathbf{P}(E)$ un espace projectif de dimension n sur k. On note $\pi : E \backslash \{0\} \to \mathbf{P}(E)$ la surjection canonique.

1. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E ne contenant pas 0. Montrer que $\pi|_{\mathcal{F}}$ est injective.

Une *carte affine* de $\mathbf{P}(E)$ est une application $f : k^n \to \mathbf{P}(E)$ de la forme $f = \pi \circ g$, où $g : k^n \to E$ est une application affine injective telle que $0 \notin g(k^n)$.

2. Soit $f : k^n \to \mathbf{P}(E)$ une carte affine. Montrer que f est injective.
3. Montrer que $\mathbf{P}(E) \backslash f(k^n)$ est un hyperplan projectif de $\mathbf{P}(E)$.
4. Réciproquement, si H est un hyperplan projectif de $\mathbf{P}(E)$, montrer qu'il existe une carte affine $f : k^n \to \mathbf{P}(E)$ telle que $\mathbf{P}(E) = f(k^n) \sqcup H$.
5. Déterminer le nombre minimal de cartes affines nécessaires pour recouvrir $\mathbf{P}(E)$.
6. Montrer que $\mathrm{PGL}(E)$ agit sur l'ensemble des cartes affines par composition à gauche.
7. Montrer que cette action est simple et transitive, c'est-à-dire que pour toutes cartes affines $f, g : k^n \to E$, il existe une unique transformation projective $h \in \mathrm{PGL}(E)$ telle que $g = h \circ f$.

Exercice 3

Montrer que si k est algébriquement clos, tout élément de $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ a un point fixe dans $\mathbf{P}^n(k)$. Est-ce encore vrai si k n'est pas algébriquement clos ?

Exercice 4

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et E^* le dual de E.

1. Montrer que $\mathbf{P}(E^*)$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des hyperplans de E.
2. En déduire que l'ensemble des droites de $\mathbf{P}^2(k)$ est en bijection naturelle avec $\mathbf{P}^2(k)$.
3. Montrer que l'ensemble des droites de $\mathbf{P}^2(k)$ passant par un point donné $p \in \mathbf{P}^2(k)$ correspond, via la bijection précédente, à une droite projective p^* de $\mathbf{P}^2(k)$.
4. Montrer que la correspondance $p \leftrightarrow p^*$ est bijective (*dualité projective*).

Exercice 5

Soit p un nombre premier. On note $P = \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_p)$ le plan projectif sur $\mathbf{F}_p$.

1. Déterminer le cardinal de P.
2. Combien y a-t-il de droites projectives dans P ?
3. Comparer avec le nombre de droites affines dans $\mathbf{F}_p^2$.
4. Combien y a-t-il de droites projectives passant par un point donné de P ?
5. Plus généralement, déterminer le nombres de droites projectives de $\mathbf{P}^n(\mathbf{F}_p)$, puis déterminer le nombre de droites projectives de $\mathbf{P}^n(\mathbf{F}_p)$ passant par un point donné de $\mathbf{P}^n(\mathbf{F}_p)$.

Exercice 6

Soit D, D' deux droites du plan projectif $\mathbf{P}^2(k)$ et m un point de $\mathbf{P}^2(k)$ n'appartenant ni à D ni à D'.

1. Montrer que pour tout $x \in D$, la droite (mx) rencontre D' en un unique point, noté $f(x)$.
2. Montrer que $f : D \to D'$ est une transformation projective bijective (on l'appelle *perspective de centre m de D sur D'*).

Exercice 7

Dans cet exercice, on identifie $\mathbf{P}^1(k)$ à $k \cup \{\infty\}$.

1. Montrer que toute homographie $f \in \mathrm{PGL}_2(k)$ est de la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a, b, c, d \in k$ tels que $ad - bc \neq 0$.
2. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(k)$ agit 3-transitivement sur $\mathbf{P}^1(k)$.
3. Déterminer le stabilisateur de ∞ dans $\mathrm{PGL}_2(k)$.
4. Quelles sont les homographies qui fixent 0 et ∞ ?
5. Montrer que si $f \in \mathrm{PGL}_2(k)$ fixe trois points de $\mathbf{P}^1(k)$, alors $f = \mathrm{id}$.
6. On suppose $k = \mathbf{C}$. Montrer que si $f \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ est d'ordre 2, alors f est conjuguée à l'application $x \mapsto -x$.

Exercice 8 (Birapport)

1. Soient a, b, c trois points distincts d'une droite projective D sur k. Montrer qu'il existe une unique homographie $\varphi : D \to \mathbf{P}^1(k)$ telle que $\varphi(a) = \infty$, $\varphi(b) = 0$ et $\varphi(c) = 1$.

Soient a, b, c, d quatre points distincts d'une droite projective D sur k. Le *birapport de a, b, c, d*, noté $[a, b, c, d]$, est défini par $[a, b, c, d] = \varphi(d)$, où $\varphi : D \to \mathbf{P}^1(k)$ est l'homographie définie à la question 1.

2. Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq 4}$ quatre points distincts d'une droite projective D, $(a'_i)_{1 \leq i \leq 4}$ quatre points distincts d'une droite projective D'. Montrer que $[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a'_1, a'_2, a'_3, a'_4]$ si et seulement si il existe une homographie $f : D \to D'$ envoyant a_i sur a'_i pour tout $1 \leq i \leq 4$.
3. Montrer que si a, b, c, d sont quatre points distincts de $\mathbf{P}^1(k)$, on a $[a, b, c, d] = \frac{(d-b)/(d-a)}{(c-b)/(c-a)}$.
4. On se place dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que quatre points distincts $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ sont alignés ou cocycliques si et seulement si $[a, b, c, d] \in \mathbf{R}$.
5. En déduire que toute homographie de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ transforme une droite ou un cercle de $\mathbf{C}$ en une droite ou un cercle de $\mathbf{C}$.