Géométrie algébrique élémentaire – TD 8

Exercice 1 a) Montrer que la courbe $y = x^3$ n'est pas lisse dans $\mathbb{P}^2$.

b) Montrer que la courbe $y^2 z = x^3 + z^3$ est lisse et donner les équation des courbes affines correspondantes dans les 3 cartes : $(x \neq 0)$, $(y \neq 0)$, $(z \neq 0)$.

c) Déterminer la complétion projective de la courbe $C : y^2 = f(x)$ où $f \in k[X]$ est un polynôme de degré $d \geq 3$ sans facteur carré. Montrer que C a un unique point à l'infini et que C est lisse $\Leftrightarrow d = 3$.

d) Déterminer en fonction de m les points singuliers de la courbe $x^3+y^3+z^3 = mxyz$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Exercice 2 (Morphismes) Soient $X \subseteq \mathbb{P}^m$, $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ deux fermés algébriques. On dit qu'une fonction $F : X \to Y$ est un morphisme s'il existe un recouvrement ouvert $X = \cup_i X_i$ tel que pour tout i, il existe des polynômes homogènes de même degré

$$F_0, ..., F_n$$

tels que pour tout $x \in X_i$, $F_j(x) \neq 0$ pour un certain j et $F(x) = [F_0(x) : ... : F_n(x)]$.

On peut utiliser la même définition pour les ouverts de X.

a) Soit C la courbe projective d'équation $x^2+y^2 = z^2$. Montrer que la fonction

$$F : C \to \mathbb{P}^1,$$

$$[x : y : z] \mapsto \begin{cases} (x - z : y) & \text{si } x \neq z \\ (y : -x - z) & \text{si } x \neq -z \end{cases}$$

est bien définie et que F est un morphisme. En déduire que toute conique irréductible de $\mathbb{P}^2$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$.

b) Montrer que les automorphismes de $\mathbb{P}^1$ sont de la forme :

$$[x : y] \mapsto [ax + by : cx + dy]$$

pour une matrice inversible $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

c) Montrer que tout morphisme $F : U \to \mathbb{P}^n$ défini sur un ouvert de $\mathbb{P}^1$ se prolonge à $\mathbb{P}^1$.

d) Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre variétés projectives. Montrer que le graphe Γ_f est fermé dans $X \times Y$ (*indication : la propriété d'être fermé est une propriété locale*). En déduire que $f(X)$ est fermé dans Y. Montrer que si X est irréductible et $f : X \to \mathbb{A}^1$ est un morphisme alors f est constant.

e) Trouver l'ouvert maximal où on peut prolonger le morphisme :

$$\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2 , (x : y : z) \mapsto (1/x : 1/y : 1/z)$$

défini sur $(xyz \neq 0)$.

f) Montrer que le morphisme :

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3, ([x : y], [z : t]) \mapsto [xz : xt : yz : yt]$$

est un isomorphisme sur son image.