Géométrie algébrique – TD 10

Exercice 1

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la courbe de Fermat $C_n : x^n + y^n = 1$, définie sur $\mathbf{C}$.

1. Montrer que $\overline{C_n}$ est lisse.
2. Déterminer les tangentes de $\overline{C_n}$ aux points à l'infini.
3. Montrer que la fonction rationnelle x sur $\overline{C_n}$ a un pôle simple en chaque point à l'infini.
4. On suppose $n = 3$. Déterminer les zéros et les pôles dans $\overline{C_n}$ de la fonction rationnelle $f = x + y$ (on précisera l'ordre d'annulation en chacun de ces points).
5. On considère les fonctions rationnelles $t = \frac{12}{x+y}$ et $u = \frac{36(y-x)}{x+y}$ sur $\overline{C_3}$.
   Montrer que $\varphi = (t, u)$ définit une application régulière de C_3 vers une courbe affine plane C dont on explicitera une équation.
6. Montrer que $\widetilde{\varphi} = (t : u : 1)$ définit une application rationnelle $\overline{C_3} \dashrightarrow \overline{C}$.
7. Montrer que $\widetilde{\varphi}$ est partout régulière et est restriction d'une homographie de $\mathbf{P}^2$.
8. En déduire que $\overline{C_3}$ et $\overline{C}$ sont isomorphes.

Exercice 2

Soit C la courbe affine plane d'équation $y^2 = x^3 - x^4$, définie sur $\mathbf{C}$.

1. Montrer que C est irréductible.
2. Montrer que $\varphi = (x : x^2 : y)$ définit une application rationnelle de $\overline{C}$ vers une courbe projective plane C' que l'on explicitera.
3. Déterminer l'ensemble de définition D_φ de φ.
4. Montrer qu'il existe un morphisme $\psi : C' \to \overline{C}$ tel que pour tout $P \in D_\varphi$, on ait $\psi(\varphi(P)) = P$.
5. Le morphisme ψ est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 3

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$. Soit $F \in k[X]$ un polynôme unitaire de degré 3 à racines simples. On note C_F la courbe affine plane d'équation $y^2 = F(x)$.

Le but de cet exercice est de montrer que C_F n'est pas rationnelle.

Par l'aburde, on suppose que $k(C_F) = k(f)$ avec $f \in k(C_F)$.

1. Montrer que C_F possède un unique point à l'infini P_∞ et que $\overline{C_F}$ est lisse.
2. Montrer que si $P \in \overline{C_F}$ est un pôle de f, alors $\mathrm{ord}_P(f) = -1$ (on pourra commencer par montrer que pour tout $g \in k[f] - \{0\}$, on a $\mathrm{ord}_P(f) \mid \mathrm{ord}_P(g)$).
3. Montrer qu'il existe au plus un point de $\overline{C_F}$ qui est un pôle de f.
4. Montrer qu'il existe $g \in k(C_F)$ ayant un pôle simple en P_∞ et telle que $k(C_F) = k(g)$ (on pourra prendre g de la forme $1/(f - \lambda)$ avec $\lambda \in k$).
5. Montrer que $\mathrm{ord}_{P_\infty}(x) = 2$ et $\mathrm{ord}_{P_\infty}(y) = 3$.
6. Conclure.