Géométrie algébrique – TD 12

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de $\overline{C_1}$ et $\overline{C_2}$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, et pour chaque point $P \in \overline{C_1} \cap \overline{C_2}$, calculer la multiplicité d'intersection $m_P(\overline{C_1}, \overline{C_2})$:

(a) $C_1 : y = x, \quad C_2 : y = x^2$;

(b) $C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad C_2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$;

(c) $C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad C_2 : x^2 + y^2 = 2$;

(d) $C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad C_2 : x^3 + y^3 = 1$;

Exercice 2

Pour chacune des courbes C ci-dessous, calculer la multiplicité d'intersection en $P = (0,0)$ de C avec une droite D passant par P (on distinguera suivant D) :

(a) $C : xy = 2x^2 - y^2$;

(b) $C : y^2 = x^3$;

(c) $C : xy = y^4 - x^3$.

Exercice 3

Soit k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et C la courbe affine plane $y = x^{p+1}$.

1. Montrer que C est lisse et que toutes ses tangentes passent par le point $(0,0)$.
2. Vérifier le théorème de Bézout pour l'intersection de C avec chacune de ses tangentes.

Exercice 4

En utilisant le théorème de Bézout, montrer que toute courbe projective plane lisse est irréductible.

Exercice 5

Soit k algébriquement clos et $H \in k[X,Y,Z]_d$ irréductible. En utilisant le théorème de Bézout, montrer que la courbe $C = V(H)$ possède au plus $\frac{d(d-1)}{2}$ points singuliers (on pourra considérer l'intersection de C avec la courbe définie par une dérivée partielle de H).

Exercice 6 (Théorème de Pascal)

Soit k un corps algébriquement clos. Soit $C = V(F) \subset \mathbf{P}^2(k)$ une conique, avec $F \in k[X,Y,Z]_2$ irréductible. Soient $P_1, \ldots, P_6$ des points de C deux à deux distincts. Pour $1 \leq i \leq 6$, notons M_i le point d'intersection des droites (P_iP_{i+1}) et $(P_{i+3}P_{i+4})$ (avec la convention $P_7 = P_1$). Le but de cet exercice est de montrer que les points M_1, M_2, M_3 sont alignés.

1. Pour tout $1 \leq i \leq 6$, on note D_i la droite (P_iP_{i+1}). Montrer qu'il existe un polynôme G homogène de degré 3 tel que $V(G) = D_1 \cup D_3 \cup D_5$.
2. Montrer que C et $V(G)$ s'intersectent transversalement.
3. En utilisant le théorème $AF + BG$ avec un polynôme homogène de degré 3 bien choisi, démontrer que M_1, M_2, M_3 sont alignés.

4. Démontrer la réciproque de théorème de Pascal : si $P_1, \ldots, P_6$ sont tels que M_1, M_2, M_3 sont alignés, alors $P_1, \ldots, P_6$ sont sur une conique.

Exercice 7 (Loi de groupe sur une cubique)

Soit k un corps algébriquement clos. Soit $C \subset \mathbf{P}^2(k)$ une cubique lisse. On fixe un point $O \in C$. Le but de cet exercice est de munir C d'une loi de groupe abélien, notée $+$, d'élément neutre O, qui vérifie la propriété suivante : trois points $P, Q, R \in C$ sont alignés si et seulement si $P + Q + R = O$.

Étant donnés deux points $P, Q \in C$, on note (PQ) la droite passant par P et Q, et on convient que si $P = Q$ alors (PQ) est la tangente de C en P.

1. Soient $P, Q \in C$. Montrer qu'il existe un unique point $\varphi(P, Q) \in C$ telle que la droite (PQ) intersecte C aux points P, Q et $\varphi(P, Q)$ (comptés avec multiplicité).
2. Pour tous points $P, Q \in C$, on définit $P + Q = \varphi(O, \varphi(P, Q))$. Montrer que la loi $+$ est commutative, admet O comme élément neutre, et que tout point admet un inverse.
3. Soient $P, Q, R \in C$. On pose $D_1 = (PQ)$, $D_2 = (P + Q, R)$, $D_3 = (Q + R, O)$, $D'_1 = (P + Q, O)$, $D'_2 = (QR)$ et $D'_3 = (P, Q + R)$. En appliquant le théorème $AF + BG$ avec $V(F) = C$, $V(G) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ et $V(P) = D'_1 \cup D'_2 \cup D'_3$, montrer que $\varphi(P + Q, R) = \varphi(P, Q + R)$ et en déduire l'associativité de $+$.
4. Soit k_0 un sous-corps de k tel que C est définie par un polynôme à coefficients dans k_0. Posons $C(k_0) = C \cap \mathbf{P}^2(k_0)$. Montrer que si $O \in C(k_0)$, alors $C(k_0)$ est un sous-groupe de $C(k)$.
5. *Exemple :* On prend $k = \mathbf{C}$, $k_0 = \mathbf{Q}$ et E la complétion projective de la courbe $y^2 + y = x^3 - x$, avec $O = (0 : 1 : 0)$. Calculer les premiers multiples du point $P = (0, 0) \in E(\mathbf{Q})$.