Géométrie algébrique élémentaire – TD 13

Exercice 1 Soient C une courbe irréductible sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p et $K = k(C)$ son corps des fonctions rationnelles.

Montrer que pour un $t \in K$ sont équivalentes :

i) $K/k(t)$ est algébrique séparable ;

ii) dt est une base de $\Omega_{K/k}$;

iii) $t \notin K^p$.

Indication : pour iii $\Rightarrow$ i : en utilisant qu'il existe toujours au moins un élément $x \in K$ tel que $K/k(x)$ est algébrique séparacle, vérifier que $[K : K^p] = p$. Puis si on note K_1 la plus grande extension $k(t) \subseteq K_1 \subseteq K$ telle que $K_1/k(t)$ est séparable et montrer que $K^pK_1 = K$ ...

En déduire que si t est une uniformisante, dt est une base de $\Omega_{K/k}$.

Exercice 2 Soit $A := k[X,Y]/(Y^2 - X^3)$. On note x, y les classes de X, Y. On note K le corps des fractions de A.

a) Montrer que $\omega := 3ydx - 2xdy \neq 0$ dans $\Omega_{A/k}$.

b) Montrer que dans $\Omega_{A/k}$,

$$y\omega = x^2\omega = 0 \ .$$

En déduire que $\omega = 0$ dans $\Omega_{K/k}$.

Exercice 3 (définition équivalente des formes différentielles) Soit A une $k-$algèbre. Soit $m : A \otimes_k A \to A$, $a \otimes b \mapsto ab$.

On note $I := \ker m$.

On considère I/I^2 comme un $A-$module en posant :

$$a.\omega := (a \otimes 1)\omega = (1 \otimes a)\omega \ .$$

a) Montrer que $d_1 : A \to I/I^2$, $a \mapsto a \otimes 1 - 1 \otimes a$ est une $k-$dérivation.

b) En déduire que l'on a un isomorphisme de $A-$modules : $\Omega_{A/k} \simeq I/I^2$, $da \mapsto d_1a$.

Exercice 4 a) Soit $f \in k(\mathbb{P}^1)$. Montrer que

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \mathrm{ord}_t(f) = 0 \ .$$

b) Soit C une courbe projective lisse et irréductible dans $\mathbb{P}^2$ défini par un polynôme homogène irréductible $F \in k[X,Y,Z]$. Soient $p, q \in k[X,Y,Z]$ deux polynômes homogènes de même degré premiers à F. En appliquant le théorème de Bézout à (F,p) et à (F,q), montrer :

$$\sum_{t \in C} \mathrm{ord}_t(p/q) = 0 \ .$$

Exercice 5 Soit C une courbe projective irréductible. Soit P un point lisse de C.

Si t est une uniformisante en P, on pose pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega_{k(C)/k}$:

$$\mathrm{rés}_t(\omega) := a_{-1}$$

le coefficient devant t^{-1} dans le développement limité de f.

a) Montrer que $\mathrm{rés}_t(df/f) = \mathrm{ord}_P(f)$ si $f \in k(C)$.

b) Montrer que si $\mathrm{rés}_t df = 0$ si $f \in k(C)$.

c) Si u est une autre uniformisante en P, montrer que $\mathrm{rés}_t(\omega) = \mathrm{rés}_u(\omega)$ (*traiter seulement le cas de caractéristique nulle*).

On notera rés$_P$ la fonction rés$_t$ indépendamment de l'uniformisante en P choisie.

On note t la fonction rationnelle x_1/x_0 sur $\mathbb{P}^1$. Soient p, q des polynômes en une variable non nuls premiers entre eux.

d) Déterminer les points de $\mathbb{P}^1$ où la forme différentielle p/qdt est régulière.

e) Démontrer le théorème des résidus pour $\mathbb{P}^1$:

$$\sum_{P\in\mathbb{P}^1} \text{rés}_P(\omega) = 0 \ .$$

Exercice 6 (Relation genre-degré) Soit $F \in k[X_0, X_1, X_2]$ un polynôme homogène de degré d irréductible tel que la courbe C de $\mathbb{P}^2$ définie par F est lisse. On suppose que $F(0, 1, 0) \neq 0$ et que F n'est pas divisible par un des X_i.

On pose $f_0(Y_1, Y_2) := F(1, Y_1, Y_2)$ et $f_2(z_0, z_1) := F(z_0, z_1, 1)$.

a) Montrer que les courbes affines $C_i = (f_i = 0) = C \cap (X_i \neq 0)$ $i = 0, 2$ recouvrent C et que la partie homogène de plus haut degré de f_0 est première avec Y_2.

b) Soit $k(C)$ le corps des fonctions rationnelles sur C. Soit $\omega \in \Omega_{k(C)/k}$. Dans $k(C)$, on note :

$$y_i = X_i/X_0 \, , \, z_i = X_i/X_2 \ .$$

On suppose que $\partial_{X_1}(F) \neq 0$. Montrer que si $\omega \in \Omega(C_0)$, il existe $R \in k[Y_1, Y_2]$ tel que $\omega = \frac{R(y_1,y_2)}{\partial_{y_1} f_0(y_1,y_2)} dy_2$ dans $\Omega_{k(C)/k}$. On choisit R de degré minimal.

c) On suppose que ω est régulière sur C. Montrer que dans $k(C)$, $R(y_1, y_2) = y_2^{d-3} S(1/y_2, y_1/y_2)$ pour un certain polynôme S en 2 variables.

d) En déduire que f_0 divise $Y_2^{m-(d-3)} R(Y_1, Y_2) - Y_2^m S(1/Y_2, Y_1/Y_2)$ dans $k[Y_1, Y_2]$ pour m assez grand. En considérant les parties homogènes de plus hauts degrés, montrer que $\deg R \leq d - 3$.

e) Montrer que $k[Y_1, Y_2]_{\leq d-3} \to \Omega(C)$, $R \mapsto \frac{R dy_2}{\partial_{y_1} f_0}$ est un isomorphisme.

f) Si $\partial_{X_1}(F) = 0$, montrer que $k[Y_1, Y_2]_{\leq d-3} \to \Omega(C)$, $R \mapsto \frac{R dy_1}{\partial_{y_2} f_0}$ est un isomorphisme.

g) Conclure : $g(C) = \binom{d-1}{2}$.