Feuille d'exercices n°2

Exercice 1.

Un groupe est dit *monogène* s'il est engendré par un de ses éléments.

1. Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Montrer qu'un groupe est monogène si et seulement s'il est isomorphe soit à $\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un entier non nul n.
3. Donner les générateurs de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. Soient n et m des entiers non nuls. Déterminer les morphismes de groupes : de $\mathbb{Z}$ dans lui-même ; de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$; de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
5. Donner le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
6. Montrer que l'image d'un groupe monogène par un morphisme surjectif est un groupe monogène.

Exercice 2. **Caractérisation des groupes cycliques.**

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. (a) Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.
   (b) Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Montrer que pour tout diviseur d de n, le groupe G admet un unique sous-groupe d'ordre d.
   (c) En déduire la relation $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, où $\varphi(d)$ est l'indicatrice d'Euler de l'entier d.
2. Réciproquement, soit G un groupe fini d'ordre n. On suppose que pour tout diviseur d de n, le groupe G a au plus un sous-groupe cyclique d'ordre d. Montrer que G est cyclique.

   Indication : on pourra d'abord montrer que si G est un groupe fini d'ordre n, alors $n = \sum_{d|n} r_d\varphi(d)$, où r_d désigne le nombre de sous-groupes cycliques de G d'ordre d.
3. Application. Soit K un corps. Montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif K^* est cyclique.

Exercice 3. **Structure des groupes $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$.**

1. Soit p un nombre premier impair.
   (a) Pour tout entier k ≥ 1, montrer qu'il existe un entier a_k, premier avec p, tel que
   $$(1+p)^{p^k} = 1 + a_k p^{k+1}.$$
   (b) Quel est l'ordre de $1+p$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*$?
   (c) En déduire un isomorphisme de groupes :
   $$\forall k \geq 1, \quad (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^* \simeq \mathbf{Z}/p^{k-1}(p-1)\mathbf{Z}.$$
2. On considère maintenant le cas $p = 2$.
   (a) Pour $n = 1$ ou $n = 2$, montrer que le groupe $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ est cyclique.
   (b) Pour tout entier $k \geq 0$, montrer qu'il existe un entier $u_k \geq 0$ impair tel que $5^{2^k} = 1 + 4 \times 2^k u_k$.
   (c) Si $n \geq 2$, quel est l'ordre de la classe de 5 dans $(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^*$?
   (d) En déduire, pour tout $n \geq 3$, un isomorphisme de groupes :
   $$(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^* \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2^{n-2}\mathbf{Z}.$$
3. Pour quels entiers $n \geq 1$ le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ est-il cyclique ?

Exercice 4.

Soit G un groupe abélien fini et soit H un sous-groupe de G. On suppose que le cardinal de H est premier à l'indice de H dans G. Montrer qu'il existe un sous-groupe H' de G tel que G soit isomorphe à $H \times H'$.

Exercice 5.

Soient m et n deux entiers supérieurs à 1, soient δ et μ respectivement le pgcd et le ppcm de m et n. Montrer que les groupes $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/\delta\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/\mu\mathbf{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 6.

Soit G un groupe cyclique d'ordre 2^n. Montrer qu'un élément de G l'engendre si et seulement s'il n'est pas un carré.

Exercice 7.

Montrer que le groupe $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, +)$ est un groupe de torsion qui possède un unique sous-groupe d'ordre n pour tout $n \geq 1$, et que ce sous-groupe est cyclique.

Exercice 8.

À isomorphisme près, déterminer les groupes abéliens d'ordre 12, d'ordre 24, d'ordre 51, d'ordre 81...

Exercice 9.

Déterminer les diviseurs élémentaires des groupes suivants :

1. $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$;
2. $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$;
3. $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$;
4. $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/18\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/21\mathbf{Z}$.

Exercice 10.

Déterminer la structure des groupes abéliens de type fini suivants :

1. $G = \mathbf{Z}^2/\langle(1,3),(2,0)\rangle$;
2. $G = \mathbf{Z}^2/\operatorname{im}(f)$ avec $f : (u,v) \in \mathbf{Z}^2 \mapsto (u+v, u-v) \in \mathbf{Z}^2$;
3. $G = \mathbf{Z}^3/\langle(4,8,10),(6,2,0)\rangle$;
4. $G = \mathbf{Z}^3/\operatorname{im}(f)$ avec $f : (u,v,w) \in \mathbf{Z}^3 \mapsto (u-v, v-w, w-u) \in \mathbf{Z}^3$.

Exercice 11.

Calculer une base adaptée de $\mathbf{Z}^n$ et les diviseurs élémentaires pour les sous-groupes suivants :

1. $G = \langle(1,1),(1,-1)\rangle \qquad (n=2)$;
2. $G = \langle(3,-6),(4,2)\rangle \qquad (n=2)$;
3. $G = \langle(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2)\rangle \qquad (n=3)$;
4. $G = \langle(1,-3,5),(2,-4,6)\rangle \qquad (n=3)$.

Exercice 12.

Trouver une base des groupes abéliens suivants :

1. $G = \langle(2,5),(5,-1),(1,-2)\rangle \subset \mathbf{Z}^2$;
2. $G = \{(u,v) \in \mathbf{Z}^2,\ u \equiv v \pmod 2\}$;
3. $G = \langle(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\rangle \subset \mathbf{Z}^3$;
4. $G = \{(u,v,w) \in \mathbf{Z}^3,\ u \equiv v \pmod 2, v \equiv w \pmod 3\}$.

Exercice 13.

Soit n un entier supérieur à 1. Montrer que tout morphisme de groupes surjectif de $\mathbf{Z}^n$ dans lui-même est un isomorphisme.

Exercice 14.

Soient G, H et K des groupes abéliens finis. Montrer que si $G \times H$ et $G \times K$ sont isomorphes, alors H est isomorphe à K. Le résultat subsiste-t-il en supposant seulement G, H et K abéliens de type fini ?

Exercice 15.

Soit G un groupe abélien fini. On appelle *caractère* de G un morphisme de groupes de G dans $\mathbf{C}^*$; on note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G.

1. Vérifier que la multiplication définit une loi de groupe sur $\widehat{G}$.
2. Montrer que le groupe des caractères de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est isomorphe à μ_n.
3. Pour tous groupes abéliens finis G_1 et G_2, montrer que $\widehat{G_1 \times G_2}$ est isomorphe à $\widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$.
4. Déduire des questions précédentes que G et $\widehat{G}$ sont isomorphes.
5. Si H est un sous-groupe de G, montrer que $\widehat{G/H}$ s'identifie naturellement à un sous-groupe de $\widehat{G}$.

Exercice 16.

Soit G un groupe abélien fini. On appelle caractère de G tout morphisme de groupes de G dans $(\mathbf{C}^*, \times)$.

1. Soit H un sous-groupe de G, et soit χ un caractère de H. Montrer que χ se prolonge en un caractère de G.
2. Soit r l'exposant du groupe G, et soit x un élément d'ordre r. Montrer qu'il existe un sous-groupe K de G tel que l'on ait un isomorphisme de groupes :
$$G \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}x.$$
3. Montrer que tout groupe abélien fini est produit de groupes cycliques.

Exercice 17.

Soit n un entier naturel non nul ; on note μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$.

1. Montrer que μ_n est un sous-groupe de $\mathbf{C}^\times$, monogène et d'ordre n.
2. Combien y a-t-il d'isomorphismes de groupes entre μ_n et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Exercice 18.

Soit p un nombre premier. On note μ_{p^∞} l'union des groupes μ_{p^n} lorsque n décrit $\mathbf{N}^*$.

1. Soient m et n dans $\mathbf{N}^*$ avec m supérieur ou égal à n ; montrer que μ_{p^n} est inclus dans μ_{p^m}.
2. Montrer que μ_{p^∞} est un sous-groupe de $\mathbf{C}^*$ et que tous ses éléments ont pour ordre une puissance de p.
3. Montrer que les sous-groupes stricts de μ_{p^∞} sont exactement les μ_{p^n}, où n décrit $\mathbf{N}^*$.

Exercice 19.

Soit U_1 le groupe des nombres complexes de module 1.

1. Montrer que tout sous-groupe fini de U_1 est cyclique, engendré par une racine de l'unité.
2. Montrer que tout sous-groupe infini de U_1 est dense.
3. Soit $G = \{z = a + ib,\ |z| = 1, a, b \in \mathbf{Q}\}$.
   (a) Montrer que G est un sous-groupe de U_1.
   (b) Montrer que G n'est pas de type fini.

Exercice 20.

Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense soit monogène de la forme $a\mathbf{Z}$ avec $a \in \mathbf{R}_+^*$.

Exercice 21.

1. Trouver les entiers n tels que tout groupe d'ordre n est cyclique.
2. Trouver les entiers n tels que tout groupe d'ordre n est abélien.