Algèbre avancée

Examen partiel (durée : 2 heures)

NB : L'usage du cours est autorisé (mais pas les TD).

Exercice 1

On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\beta = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Montrer que α est algébrique sur $\mathbf{Q}$; expliciter le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$ et la liste des conjugués de α.
2. Montrer que l'extension $\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}$ est galoisienne. *On pourra observer que le produit $\alpha\beta$ appartient à $\mathbf{Q}(\alpha)$.*
3. On pose $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$. Montrer qu'il existe un unique élément $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\alpha) = \beta$.
4. Montrer que l'on a $\sigma(\beta) = -\alpha$. *On pourra commencer par calculer $\sigma(\alpha\beta)$.*
5. Montrer que G est un groupe cyclique à 4 éléments, engendré par σ.
6. Dresser la liste des sous-corps de $\mathbf{Q}(\alpha)$.
7. Montrer que $\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}(\zeta_{16}) \cap \mathbf{R}$, où ζ_{16} désigne une racine primitive 16^{e} de l'unité dans $\mathbf{C}$. *On pourra calculer* $\cos\frac{\pi}{8}$.

Exercice 2

On considère l'anneau quotient $K = \mathbf{F}_7[X]/(X^2+1)$. On note i l'élément de K égal à la classe de X modulo X^2+1. On identifie $\mathbf{F}_7$ à un sous-anneau de K via le morphisme injectif déduit du morphisme canonique de $\mathbf{F}_7$ dans $\mathbf{F}_7[X]$.

1. Montrer que K est un corps à 49 éléments.
2. Quel est le nombre d'éléments α de K tels que $K = \mathbf{F}_7(\alpha)$? Quel est le nombre de générateurs du groupe K^* ?
3. Montrer que tout polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbf{F}_7$ admet une racine dans K.
4. On note F l'endomorphisme de Frobenius de K. Pour tout élément α de K, on pose
$$T(\alpha) = \alpha + F(\alpha) \qquad N(\alpha) = \alpha F(\alpha).$$
Montrer que $T(\alpha)$ et $N(\alpha)$ appartiennent à $\mathbf{F}_7$.
5. Montrer que l'application N induit un morphisme de groupes de K^* dans $\mathbf{F}_7^*$. Montrer que le noyau de ce morphisme est de cardinal 8 et que ce morphisme est surjectif.
6. Vérifier que $F(i) = -i$.

7. Soit $\alpha \in K$, on écrit $\alpha = a + ib$ avec $a, b \in \mathbf{F}_7$. Expliciter $F(\alpha)$, $T(\alpha)$ et $N(\alpha)$ en fonction de a et b.
8. Soit $u \in \mathbf{F}_7^*$. On appelle *cercle associé à u* l'ensemble
$$C_u = \{(a,b) \in \mathbf{F}_7 \times \mathbf{F}_7; a^2 + b^2 = u\}.$$
Déterminer le cardinal de C_u à l'aide de la question 5.
9. Soit $\alpha \in K^*$. Montrer que α engendre K^* si et seulement si $N(\alpha)$ engendre $\mathbf{F}_7^*$. En déduire que l'ensemble des générateurs de K^* s'identifie à la réunion disjointe de deux cercles, que l'on explicitera.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de montrer qu'une équation du troisième degré irréductible, possédant trois racines réelles (le célèbre *casus irreducibilis*), ne peut pas se résoudre à l'aide de radicaux réels.

Soit $P = X^3 + pX + q \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme irréductible possédant trois racines réelles α, β, γ. On pose $\delta = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$.

On suppose par l'absurde que α est exprimable *par radicaux réels*, c'est-à-dire qu'il existe une suite $u_1, \ldots, u_n$ de nombres réels strictement positifs et une suite $k_1, \ldots, k_n$ d'entiers ≥ 2 tels que $\alpha \in \mathbf{Q}(u_1, \ldots, u_n)$ avec $u_i^{k_i} \in \mathbf{Q}(u_1, \ldots, u_{i-1})$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Quitte à rallonger la suite $u_1, \ldots, u_n$, on supposera que les k_i sont premiers.

On définit la suite $K_0, \ldots, K_n$ de sous-corps de $\mathbf{R}$ par $K_0 = \mathbf{Q}(\delta)$ et $K_i = K_{i-1}(u_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. On note r le plus petit entier i tel que $\alpha \in K_i$.

1. Montrer que δ^2 appartient à $\mathbf{Q}^*$ et en déduire $r \geq 1$.
2. Montrer que $\mathbf{Q}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{Q}(\alpha, \delta)$ et en déduire $\beta, \gamma \in K_r$.
3. Montrer que P est irréductible sur K_{r-1}.
4. Montrer que si K est un corps, ℓ est premier et $a \in K$ n'est pas une puissance ℓ-ième, alors le polynôme $X^\ell - a$ est irréductible sur K.
5. Montrer que $k_r = 3$.
6. Montrer que K_r/K_{r-1} est galoisienne.
7. Conclure.
8. Application : montrer que $\cos \frac{2\pi}{7}$ et $\cos \frac{2\pi}{9}$ ne s'expriment pas en termes de radicaux réels.