ENS Lyon 2013 - 2014

MASTER 1– ALGÈBRE AVANCÉE POUR LE 27.09.2013

Devoir à la maison 1

La rédaction et la clarté des arguments employés seront évidemment pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1. Soit K un corps arbitraire. Etudier la séparabilité sur K du polynôme $P(X) = X^3 - 3X + 1$.

Exercice 2. Soit K un corps de caractéristique nulle et $P \in K[X]$ un polynôme de degré $d \geq 1$. Soit L/K une extension de corps contenant une racine a de P. Démontrer que si a est de multiplicité $r > \frac{d}{2}$, alors a appartient à K.

Exercice 3. Soit L/K une extension de corps de type fini.

1. Montrer que le degré de transcendance de l'extension L/K est fini, puis qu'il existe un entier $d \geq 0$ et des éléments $x_1, \ldots, x_d \in L$ algébriquement indépendants sur K tels que l'extension $L/K(x_1, \ldots, x_d)$ soit finie.
2. Montrer que pour tout K-morphisme $\sigma : L \to L$, l'extension $L/\sigma(L)$ est finie. A-t-on nécessairement $L = \sigma(L)$?

Exercice 4.

1. Soit L/K une extension de corps que l'on suppose de degré fini $n \geq 1$.
   (a) Montrer que $L[X]$ est un $K[X]$-module libre de rang n.
   (b) Montrer que l'extension $L(X)/K(X)$ est de degré fini $\geqslant n$. (On rappelle que pour tout corps C, on désigne par $C(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans C).
   (c) A-t-on nécessairement $[L(X) : K(X)] = n$?
2. Soit L/K une extension de corps de type fini.
   Déduire de ce qui précède que toute sous-extension M/K de L/K est encore de type fini.
   Indication : On montrera que si B est une base de transcendance de M/K, alors $M/K(B)$ est finie.

Exercice 5.

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est encore un ensemble dénombrable.
2. Soit K un corps dénombrable. Démontrer que toute clôture algébrique de K est dénombrable.
   Indication : On montrera d'abord que $K[X]$ est dénombrable.
3. En déduire que le degré de transcendance de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$ est infini.
4. Montrer que pour toute extension $L/\mathbb{Q}$ de degré de transcendance fini, il existe un sous-corps de $\mathbb{C}$ isomorphe à L.

Exercice 6. Soit K/k une extension de corps. Soient E et F deux sous-corps de K contenant k. Les sous-extensions E/k et F/k sont dites *algébriquement (resp. linéairement) disjointes* lorsque toute famille d'éléments de E qui est algébriquement libre (resp. linéairement libre) sur k l'est sur F.

1. Démontrer que l'on a toujours $[EF : E \cap F] \leq [E : E \cap F][F : E \cap F]$.
2. Supposons que E/k et F/k sont linéairement disjointes.
   (a) Démontrer que $E \cap F = k$. La réciproque est-elle vraie ?
   Indication : On pourra considérer des corps de rupture de $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.
   (b) Démontrer que $[EF : F] = [E : k]$ et $[EF : E] = [F : k]$.
3. Montrer que si E/k et F/k sont des extensions finies vérifiant $[EF : k] = [E : k][F : k]$, alors E/k et F/k sont linéairement disjointes.
   Indication : On pourra construire une base de EF sur k à partir de bases de E et F sur k.

4. Montrer que si E/k et F/k sont des extensions finies de degrés premiers entre eux, alors elles sont linéairement disjointes.
5. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (a) E/k et F/k sont algébriquement disjointes ;
   (b) l'extension $(E \cap F)/k$ est de degré de transcendance nul ;
   (c) toute base de transcendance de E/k est une base de transcendance de EF/F ;
   (d) si $\mathcal{B}_E$ est une base de transcendance de E/k et si $\mathcal{B}_F$ est une base de transcendance de F/k, alors $\mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F$ est une base de transcendance de EF sur k.
6. Montrer que si les extensions E/k et F/k sont linéairement disjointes, alors elles sont algébriquement disjointes. La réciproque est-elle vraie ?