Devoir à la maison 3 - Algèbre commutative

La rédaction et la clarté des arguments employés seront pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 – Table des caractères de $\mathfrak{S}_5$

On note T la représentation triviale de $\mathfrak{S}_5$ et T' la représentation de dimension 1 donnée par la signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_5 \to \{\pm 1\}$. On rappelle que le groupe $\mathfrak{S}_5$ agit sur $E = \mathbf{C}^5$ par permutation des coordonnées et que l'on a une décomposition en somme directe de sous-espaces stables $E = D \oplus H$, où D est la droite engendrée par le vecteur $e = (1, \ldots, 1)$ et où $H := \{(x_1, \ldots, x_5) \in E \mid \sum_{i=1}^{5} x_i = 0\}$.

1. Donner des représentants des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ et le cardinal de chacune de ces classes.
2. Calculer le caractère de la représentation E.
3. En déduire que la représentation H est irréductible et que l'on a une décomposition $E \cong T \oplus H$.
4. Montrer que la représentation $H' := H \otimes_{\mathbf{C}} T'$ est irréductible et n'est pas isomorphe à H.
5. Calculer le caractère de la représentation $V := \bigwedge^2 H$, puis en déduire que V est irréductible.
6. Montrer que les dimensions n_1 et n_2 des deux représentations irréductibles restantes de $\mathfrak{S}_5$ vérifient $n_1^2 + n_2^2 = 50$.
7. En déduire que $\mathfrak{S}_5$ possède une représentation irréductible W de dimension 5.
8. En utilisant les relations d'orthogonalité des caractères, montrer que la représentation $W' := W \otimes_{\mathbf{C}} T'$ n'est pas isomorphe à W.
9. Dresser la table des caractères de $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 2 – Différentielles de Kähler

Soient A et B des anneaux commutatifs et soit $\rho : A \to B$ un morphisme d'anneaux qui permet de munir B d'une structure de A-algèbre. On rappelle que le A-module $B \otimes_A B$ est alors naturellement muni d'une structure de A-algèbre. Notons $j_1, j_2 : B \to B \otimes_A B$ les applications respectivement définies par :

$$\forall\, x \in B,\ j_1(x) = x \otimes 1 \ \text{ et } \ j_2(x) = 1 \otimes x\ .$$

1. Montrer que j_1 et j_2 sont des morphismes de A-algèbres.
2. Montrer qu'il existe un unique morphisme de A-algèbres $m : B \otimes_A B \to B$ tel que $m(x \otimes y) = xy$ pour tous $x, y \in B$.
3. Montrer que le noyau I de m est l'idéal engendré par la famille $\{x \otimes 1 - 1 \otimes x,\ x \in B\}$.
   Indication : En notant J l'idéal engendré par les $x \otimes 1 - 1 \otimes x$, montrer que tout élément de $B \otimes_A B$ est congru modulo J à un tenseur simple.

Soit M un B-module. Une *A-dérivation de B dans M* est une application A-linéaire $D : B \to M$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in B, D(xy) = xD(y) + yD(x)\ .$$

On note $\mathcal{D}_A(B, M)$ l'ensemble des A-dérivations de B dans M.

4. Donner un exemple de dérivation non nulle lorsque $A = \mathbf{R}$, $B = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $M = B$.
5. Montrer que toute A-dérivation $D : B \to M$ vérifie $D \circ \rho = 0$.
6. Montrer que $\mathcal{D}_A(B, M)$ est un sous-B-module de $\mathrm{Hom}_A(B, M)$.
7. Montrer que si $D : B \to M$ est une A-dérivation et $u : M \to M'$ est une application B-linéaire , alors $u \circ D$ est une A-dérivation.

On munit désormais $B \otimes_A B$ de la structure de B-algèbre (et donc de B-module) donnée par j_1. Considérons l'application $v : \mathrm{Hom}_A(B, M) \to \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A B, M)$ donnée par $v(f)(x \otimes y) = xf(y)$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(B, M)$ et tous $x, y \in B$.

8. Montrer que v est bien définie puis que c'est un isomorphisme de B-modules.
9. Montrer que $v(\mathcal{D}_A(B, M))$ est le sous-B-module de $\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A B, M)$ formé des applications qui s'annulent sur $j_1(B)$ et sur I^2.
10. En déduire l'existence d'une paire $(\Omega_{B/A}, d_{B/A})$, où $\Omega_{B/A}$ est un B-module et $d_{B/A} : B \to \Omega_{B/A}$ est une A-dérivation, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout B-module M et toute A-dérivation $D : B \to M$, il existe une unique application B-linéaire $u : \Omega_{B/A} \to M$ telle que $D = u \circ d_{B/A}$.
    Indication : Penser à définir $\Omega_{B/A}$ comme un quotient du B-module $B \otimes_A B$.
    Le B-module $\Omega_{B/A}$ est appelé *module des A-différentielles de B*. Ses éléments sont des analogues algébriques des 1-formes différentielles, comme nous le verrons dans la suite.
11. Montrer que tout élément de $\Omega_{B/A}$ peut être écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{n} f_i dg_i$ avec $f_i, g_i \in B$. Une telle écriture est-elle unique ?
12. Supposons que $B = A[X]$. Montrer que pour tout $P \in A[X]$, on a $d(P(X)) = P'(X)dX$.
13. Montrer que $\Omega_{A[X]/A}$ est un $A[X]$-module libre de rang 1 engendré par dX.
    Indication : pour démontrer la liberté de (dX), utiliser la propriété universelle de $\Omega_{A[X]/A}$.
14. Décrire le B-module $\Omega_{B/A}$ dans les cas suivants :
    (a) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{C}$ et ρ est l'inclusion canonique ;
    (b) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{Q}$ et ρ est l'inclusion canonique ;
    (c) $A = k[X^p]$, $B = k[X]$, où p est un nombre premier et k un corps ;
15. Soit A' une A-algèbre et soit $B' = B \otimes_A A'$. Montrer qu'il existe un isomorphisme de B'-modules $\Omega_{B'/A'} \cong \Omega_{B/A} \otimes_B B'$.
16. Soit $\varphi : B \to C$ un morphisme surjectif de A-algèbres. Démontrer qu'il existe une application C-linéaire surjective $\pi : \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A}$ dont le noyau est le C-module engendré par la famille $\{d_{B/A}(x) \otimes 1,\ x \in \ker(\varphi)\}$.
17. En déduire une description du B-module $\Omega_{B/A}$ par générateurs et relations lorsque B est de la forme $A[X_1, \ldots, X_n]/(P_1, \ldots, P_r)$, avec $P_1, \ldots, P_r \in A[X_1, \ldots, X_n]$.