ENS Lyon 2013 - 2014

Préparation à l'agrégation externe — Option C

Devoir à la maison - A rendre le Mardi 1er Octobre 2013

Remarque : *Une copie de devoir à la maison doit être constituée d'une ou plusieurs copies contenant les réponses rédigées aux questions ci-après, à rendre lors de la séance du 1er Octobre, ainsi qu'une feuille Xcas présentant les différents algorithmes demandés et tout autre matériel demandé dans l'énoncé ci-après, à envoyer par mail à Ramla Abdellatif et François Brunault* ***avant*** *la séance du 1er Octobre.*

Etude analytique de l'algorithme d'Euclide

Pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$, on note $\tau(m,n)$ le nombre de divisions nécessaires dans l'algorithme d'Euclide classique pour calculer le pgcd de m et n, en commençant par la division de m par n. On a donc par exemple $\tau(1,2) = 2$ et $\tau(2,1) = 1$.

1. Ecrire un algorithme permettant de calculer $\tau(m,n)$.
2. Désignons par $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci, avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.
   (a) A l'aide de l'algorithme précédent, calculer les 50 premières valeurs de $\tau(F_{n+2}, F_{n+1})$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \geq 0$, on a $\tau(F_{n+2}, F_{n+1}) = n$.
3. Ecrire un algorithme permettant de vérifier que $\max\{\tau(m,n),\ 0 < m,n < N\}$ est atteint par le couple (F_r, F_{r+1}), où r désigne le plus grand entier tel que l'on ait $F_{r+1} < N$.
4. Tester cet algorithme sur quelques exemples, puis prouver que la propriété énoncée dans la question précédente est effectivement vraie.
5. Posons $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   (a) Exprimer F_n en fonction de α et de β.
   (b) Vérifier que l'on a $|\beta^n| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.
   (c) En déduire que F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$.
   (d) Démontrer que pour tous entiers m, n vérifiant $0 < m, n < N$, on a
   $$\tau(m,n) \leq \frac{\ln(\sqrt{5}N)}{\ln \alpha} .$$
   (e) Déterminer deux réels a, b (que l'on exprimera avec trois chiffres significatifs) tels que l'on ait numériquement :
   $$\forall 1 \leq m,n \leq N-1,\ \tau(m,n) \leq a + b \ln N .$$
6. On rappelle que l'on désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler. Pour tout entier $n \geq 1$, notons I_n l'ensemble des entiers $k \in \{1, \dots, n-1\}$ premiers avec n et posons alors
   $$T_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \tau(k,n) \quad \text{et} \quad \tau_n := \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k\in I_n} \tau(k,n) .$$
   Si x est un réel quelconque, on pose $T_x := T_{[x]}$ et $\tau_x := \tau_{[x]}$.
   (a) Représenter les graphes des fonctions T et τ sur le même repère. Que constatez-vous ?
   (b) Vérifier graphiquement qu'il existe un entier n_0 pour lequel $0,843 \ln x + 1,47 + n_0$ est une bonne approximation de τ_x. Quel est l'ordre de grandeur de n_0 ?