ENS Lyon — 2013 - 2014

Préparation à l'agrégation externe — Option C

Familles de polynômes orthogonaux : exemples et applications

Exercice 1. — **Notion de polynôme de meilleure approximation** —
Pour tout $n \geq 1$, notons $\mathbb{R}_n$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

1. Soit E un espace vectoriel réel contenant $\mathbb{R}_n$. Montrer que pour tout élément $v \in E$, il existe au moins un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n$ vérifiant
$$||v - P_n|| = \inf_{P \in \mathbb{R}_n} ||v - P|| \ .$$
Le polynôme P_n ainsi construit est appelé *polynôme de meilleure approximation pour v dans $\mathbb{R}_n$*.
2. Déterminer une condition suffisante sur E pour que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite ci-avant converge nécessairement vers v.
3. Posons $E := \mathrm{L}^1([-1,1])$ et $v := [x \mapsto \mathrm{sign}(x)]$. Montrer qu'il n'y a pas unicité du polynôme de meilleure approximation pour v dans $\mathbb{R}_0$.

Exercice 2. — **Introduction des polynômes orthogonaux** —
Soit (a, b) un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et soit $\omega : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction poids, i.e. une fonction continue, strictement positive et vérifiant la condition suivante :
$$\forall\ n \geq 1,\ [x \mapsto x^n \omega(x)] \in \mathrm{L}^1((a,b)) \ .$$
On pose alors $\mathrm{L}^2_\omega((a,b)) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f\sqrt{\omega} \in \mathrm{L}^2((a,b)) \right\}$, que l'on munit de l'application bilinéaire $(.,.)$ définie par :
$$\forall\ f, g \in \mathrm{L}^2_\omega((a,b)),\ (f,g) := \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx \ .$$

1. Montrer que $\left(\mathrm{L}^2_\omega((a,b)), (.,.)\right)$ est un espace de Hilbert.
2. Montrer que si l'intervalle (a, b) est borné, alors $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel dense de $\mathrm{L}^2_\omega((a,b))$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $\omega(x) := x^{-\log x}$.
   (a) Vérifier que ω est bien un poids sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que la fonction $[x \mapsto \sin(2\pi \log x)]$ appartient à $\mathrm{L}^2_\omega(\mathbb{R}_+^*)$ et qu'elle est orthogonale à $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathrm{L}^2_\omega(\mathbb{R}_+^*)$. Qu'en concluez-vous ?
4. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes unitaires $(P_{n,\omega})_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant aux trois conditions suivantes :
$$\begin{cases} P_0 \equiv 1 \ ; \\ \forall\ n \geq 0,\ \deg P_{n,\omega} = n \ ; \\ \forall\ n \geq 1,\ \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1},\ (Q, P_{n,\omega}) = 0 \ . \end{cases}$$
5. Montrer que cette suite de polynômes vérifie la relation de récurrence suivante :
$$\forall\ n \geq 0,\ P_{n+2}(X) = (X - \lambda_{n+2})P_{n+1}(X) - \mu_{n+2}P_n(X) \ ,$$
dans laquelle on a posé
$$\lambda_{n+2} := \frac{(XP_{n+1}, P_{n+1})}{||P_{n+1}||^2} \text{ et } \mu_{n+2} := \frac{||P_{n+1}||^2}{||P_n||^2} \ .$$
6. Montrer que pour tout $n \geq 1$, P_n admet n racines réelles deux à deux distinctes et toutes contenues dans l'intervalle $]a, b[$.
Indication : Commencer par prouver que P_n admet au moins une racine d'ordre impair dans $]a, b[$.

Exercice 3. — **Quelques exemples de familles orthogonales** —
On garde les notations de l'Exercice 2.

1. Posons $(a, b) = [-1, 1]$ et prenons pour ω la fonction constante égale à 1.
   (a) Vérifier que la famille de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\forall\ n \geq 0,\ L_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}((X^2-1)^n)$$
   est, à normalisation près, la famille de polynômes orthogonaux associée à l'espace $\mathrm{L}^2_\omega((a,b))$ considéré ici. Cette famille est appelée la famille des polynômes *de Legendre*.
   (b) Calculer la norme dans $\mathrm{L}^2_\omega((a,b))$ des polynômes L_n.
   (c) Etablir une relation entre les polynômes de Legendre et la famille de polynômes obtenue par application du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.
2. Posons $(a, b) = \mathbb{R}_+^*$ et $\omega := [x \mapsto e^{-x}]$.
   (a) Vérifier que la fonction ω est bien un poids sur (a, b).
   (b) Par procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, construire (à normalisation près) la famille de polynômes orthogonaux associée à l'espace $\mathrm{L}^2_\omega((a,b))$. Ces polynômes sont appelés polynômes *de Laguerre*.
   (c) Montrer que la norme dans $\mathrm{L}^2_\omega((a,b))$ du n-ième polynôme de Laguerre est égale à $n!$.
3. Posons $\omega := [x \mapsto e^{-x^2}]$.
   (a) Vérifier que la fonction ω est bien un poids sur $\mathbb{R}$.
   (b) Par procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, construire (à normalisation près) la famille de polynômes orthogonaux $(H_n)_{n\geq 0}$ associée à l'espace $\mathrm{L}^2_\omega(\mathbb{R})$. Ces polynômes sont appelés polynômes *de Hermite*.
   (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, le carré de la norme dans $\mathrm{L}^2_\omega(\mathbb{R})$ de H_n est égal à $2^n n!\sqrt{\pi}$.

Polynômes de Chebychev

Exercice 4. —

1. Soit $n \geq 0$ un entier. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :
   $$\forall\ \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)\ .$$
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a la relation de récurrence suivante :
   $$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)\ .$$
3. Expliciter sous une forme simple les cinq premiers polynômes de Chebychev.
4. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant égal à 2^{n-1} et de même parité que n.

Exercice 5. — Montrer que l'on dispose des identités suivantes :
$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \forall\ x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n\mathrm{Arccos}(x))\ .$$

Exercice 6. — Pour tout réel $t \in]-1,1[$, posons $\omega(t) := \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

1. Vérifier que ω est un poids sur $]-1,1[$.
2. Montrer que la famille de polynômes orthogonaux associée à l'espace $\mathrm{L}^2_\omega(]-1,1[)$ est égale, à normalisation près, à la famille $(T_n)_{n\geq 0}$.
3. En déduire une autre démonstration de la relation de récurrence obtenue dans l'Exercice 4.
4. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer la norme dans $\mathrm{L}^2_\omega(]-1,1[)$ du polynôme T_n.

Exercice 7. — Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Calculer $\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)|$.
2. Montrer que pour tout polynôme unitaire de degré $n \geq 1$, on a $||P||_{\infty,[-1,1]} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.
3. En déduire que $\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ est l'unique polynôme unitaire de degré n réalisant la meilleure approximation uniforme de la fonction nulle sur l'intervalle $[-1,1]$.

Exercice 8. — Considérons $v := [x \mapsto x^{n+1}]$ comme élément de $\mathcal{C}^\infty([-1,1])$ muni de la norme uniforme. Construire un polynôme de meilleure approximation pour v dans $\mathbb{R}_n$ à l'aide des polynômes de Chebychev.

Exercice 9. — Minimisation de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange —
Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur I. Montrer que l'approximation de f fournie par la méthode d'interpolation de Lagrange est optimale lorsque l'on prend pour points d'interpolation les zéros du n-ième polynôme de Chebychev.
Indication : Penser à se ramener au cas où $I = [-1,1]$.

Méthode de Gauss-Hermite et calcul approché d'intégrales

Exercice 10. — Formule de quadrature de Gauss-Jacobi — Soient $a < b$ deux réels et $n \geq 1$ un entier. Fixons n réels distincts $x_1, \ldots x_n$ dans l'intervalle $]a,b[$ et $\omega :]a,b[\to \mathbb{R}$ un poids sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de constantes réelles telles que l'on ait :
$$\forall\ P \in \mathbb{R}_{n-1}, \int_a^b P(x)\omega(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \omega_k P(x_k)\ . \tag{1}$$
Indication : Penser à utiliser le théorème de représentation de Riesz.
2. Notons $(P_n)_{n\geq 0}$ la famille de polynômes orthogonaux associée à l'espace $\mathrm{L}^2_\omega(]a,b[)$ et supposons que $x_1, \ldots x_n$ soient les zéros du polynôme P_n. Montrer qu'alors la formule (1) est valable pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}$ et que les coefficients $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont tous positifs.

Exercice 11. — Application au calcul approché d'intégrales sur un intervalle borné —
Soient $a < b$ deux réels , ω une fonction poids sur $[a,b]$ et $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$.

1. Démontrer l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}$ vérifiant $P(x_i) = f(x_i)$ et $P'(x_i) = f'(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
2. Supposons désormais que f est de classe C^{2n} sur $[a,b]$. Fixons un réel $y \in]a,b[$ distinct des éléments $x_1, \ldots, x_n$ et posons, pour tout $x \in [a,b]$,
$$\Phi(x) := f(x) - P(x) - \frac{f(y) - P(y)}{H_n(y)^2} H_n(x)^2\ .$$
   (a) Montrer que Φ' s'annule en au moins $2n$ points deux à deux distincts de $]a,b[$.
   (b) En déduire que $\Phi^{(2n)}$ s'annule au moins en un point x_y de $]a,b[$.
3. Montrer que pour tout réel $y \in]a,b[$, on a
$$|f(y) - P(y)| \leq \frac{||f^{(2n)}||_{\infty,[a,b]}}{(2n)!a_n^2} P_n(y)^2\ ,$$
où a_n désigne le coeffient dominant du n-ième polynôme de Hermite.
4. A l'aide de la formule de quadrature de Gauss-Jacobi, déduire de ce qui précède que l'on a
$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k) + R_n(f)$$
avec $|R_n(f)| \leq \frac{||H_n||^2}{(2n)!a_n^2} ||f^{(2n)}||_{\infty,[a,b]}$ lorsque f est de classe C^{2n} sur $[a,b]$.