ENS Lyon 2013 - 2014
PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE OPTION C

Algèbre linéaire et décomposition de Dunford

Algèbre linéaire sur un corps

Dans toute cette partie, K désigne un corps.

Exercice 1. — Manipulations élémentaires —

1. Comment définir une matrice ?
2. Comment obtenir la matrice identité ? Comment obtenir une matrice aléatoire ?
3. Comment additionner (respectivement : multiplier) deux matrices ?
4. Comment calculer le déterminant (respectivement : l'inverse ; le polynôme caractéristique) d'une matrice ?
5. Sur une matrice M de taille assez grande (par exemple à 20 lignes) à coefficients entiers, comparer le temps de calcul du polynôme caractéristique à l'aide de la commande Xcas appropriée à celui du calcul de $\det(X\mathrm{Id} - M)$. Que remarquez-vous ?
6. Effectuer le même test pour une matrice à coefficients réels. Quelles observations supplémentaires pouvez-vous faire ?

Exercice 2. — Systèmes linéaires et formes réduites —
Soient n et p deux entiers strictement positifs. Pour $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in K^n$, considérons le système linéaire suivant :

$$AX = B \ . \tag{1}$$

Notons $M = [AB] \in M_{n,p+1}(K)$ la matrice obtenue en concaténant A et B.

1. Notons M_1 et A_1 les formes réduites échelonnées par colonnes de M et A respectivement.
   (a) Montrer que (1) admet une solution si, et seulement si, A_1 et M_1 ont les mêmes colonnes non nulles.
   (b) Dans ce cas, comment obtenir une solution de (1) ?
2. Notons M_2 la forme réduite échelonnée par lignes de M.
   (a) Montrer que (1) admet une solution si, et seulement si, la dernière colonne de M_2 ne contient pas de pivot.
   (b) Dans ce cas, comment obtenir une solution de (1) ?
3. Laquelle de ces deux méthodes vous paraît la plus efficace pour obtenir une solution de (1) ?

Exercice 3. — Applications linéaires et formes réduites — Soient n et p deux entiers strictement positifs. Soit $f : K^p \to K^n$ une application linéaire, dont on note $M \in M_{n,p}(K)$ la matrice dans les bases canoniques de K^p et K^n.

1. Traduire l'injectivité (respectivement : la surjectivité ; la bijectivité) de f sur la forme réduite échelonnée par lignes de M.
2. Traduire l'injectivité (respectivement : la surjectivité ; la bijectivité) de f sur la forme réduite échelonnée par colonnes de M.
3. En déduire un algorithme permettant de tester si une famille de vecteurs de K^n est libre (respectivement : génératrice).

Exercice 4. — Représentation de sous-espaces vectoriels —

1. Ecrire un algorithme prenant en entrée une famille d'équations (représentées par des lignes) et renvoyant une base du sous-K-espace vectoriel défini par ces équations.

2. Ecrire un algorithme prenant en entrée une famille de n vecteurs (représentés par des colonnes) et renvoyant un système d'équations indépendantes définissant le sous-K-espace vectoriel de K^n engendré par ces vecteurs.
3. En déduire un algorithme prenant en entrée un espace vectoriel décrit comme noyau (respectivement : comme image) et renvoyant une description de cet espace sous forme d'image (respectivement : de noyau).

Exercice 5. — Création de bases — Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Ecrire un algorithme qui complète une famille de vecteurs de K^n en une base de K^n après avoir vérifié que cela était possible.
2. Ecrire un algorithme prenant en entrée deux familles finies de vecteurs L et G de K^n qui vérifie que L est une sous-famille libre de G et que G engendre K^n, puis qui renvoie une base B de K^n contenant L et contenue dans G.

Exercice 6. — Un petit récapitulatif — Soient m, n et p trois entiers strictement positifs. Etant données $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, expliquer comment utiliser Xcas pour :

- trouver une base de l'image de A ;
- déterminer le noyau de A ;
- résoudre un système linéaire de la forme $AX = B$ avec $B \in \mathbb{R}^m$;
- calculer l'inverse de A (s'il existe) ;
- décrire l'intersection des images de A et de M.

Algèbre linéaire à coefficients entiers

Exercice 7. — Systèmes linéaires et formes normales de Hermite — Soient n et p deux entiers strictement positifs. Etant donnés $A \in M_{n,p}(\mathbb{Z})$ et $B \in \mathbb{Z}^n$, on considère le système linéaire suivant, où X est à coefficients entiers :

$$AX = B \ . \tag{2}$$

Notons $M = [AB] \in M_{n,p+1}(\mathbb{Z})$ la matrice obtenue par concaténation de A et de B. Désignons respectivement par A_1 et M_1 les formes normales de Hermite suivant les colonnes de A et de M.

1. Montrer que (2) a une solution si, et seulement si, A_1 et M_1 ont les mêmes colonnes non nulles.
2. Dans ce cas, expliquer comment obtenir une solution de (2) à partir des matrices de transformation de A et de M vers leurs formes normales.

Exercice 8. — Applications linéaires et formes réduites — Soient n et p deux entiers strictement positifs. Soit $f : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^n$ une application linéaire dont on note $M \in M_{n,p}(\mathbb{Z})$ la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{Z}^p$ et $\mathbb{Z}^n$.

1. Traduire l'injectivité (respectivement : la surjectivité ; la bijectivité) de f sur la forme normale de Hermite suivant les lignes de M.
2. Traduire l'injectivité (respectivement : la surjectivité ; la bijectivité) de f sur la forme normale de Hermite suivant les colonnes de M.

Exercice 9. — Forme normale de Smith — Soient n et p deux entiers strictement positifs.

1. Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{Z})$. Démontrer l'existence d'une unique matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_{\min(n,p)})$ où les entiers d_i sont tous positifs et se divisent successivement, et de $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{Z})$ vérifiant $UMV = D$.
2. En utilisant la forme normale de Smith, écrire un algorithme prenant en entrée un sous-$\mathbb{Z}$-module L de $\mathbb{Z}^n$ et renvoyant une base adaptée de L.
3. Tester cet algorithme sur les deux exemples suivants :
   (a) L est le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
   (b) L est le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. — Quelques calculs explicites —

1. Déterminer une base du noyau et une base d'un supplémentaire du noyau (dans $\mathbb{Z}^5$) de

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{Z}^4$:

   (a) $\begin{cases} 4x + 3y + 2z + t = 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8t = 0 \\ 12x + 11y + 10z + 9t = 0 \end{cases}$;

   (b) $\begin{cases} 4x + 3y + 2z + t = 0 \bmod 8 \\ 5x + 6y + 7z + 8t = 0 \bmod 2 \\ 12x + 11y + 10z + 9t = 0 \bmod 6 \end{cases}$.

3. Notons L le sous-espace de $\mathbb{Z}^4$ engendré par $X_1 = (6, 12, -12, 18)$, $X_2 = (15, 0, 30, 15)$ et $X_3 = (10, 10, 0, 20)$.
   (a) Déterminer une base de L.
   (b) Montrer que (X_1, X_2) est une famille libre dans $\mathbb{Z}^4$.
   (c) Peut-on compléter (X_1, X_2) en une base de L ?
   (d) Trouver un vecteur de L dont les coordonnées sont de pgcd égal à 3.
4. Soit G le groupe abélien de générateurs x, y, z soumis aux relations suivantes :

$$2x + 3y - 3z = 6x + 5y + 3z = 4y - 2z = 0 \ .$$

   (a) Déterminer la structure de G comme groupe abélien.
   (b) Exhiber une base du $\mathbb{Z}$-module G en fonction de x, y et z.

Exercice 11. —

1. En utilisant la forme normale de Hermite suivant les colonnes, déterminer les triplets d'entiers (x, y, z) vérifiant :
   (a) $2x + 3y + 5z = 0$;
   (b) $2x + 3y + 5z = 1$.
2. Comparer le premier résultat avec celui obtenu en demandant à Xcas une base rationnelle de solutions dont on chasse ensuite les dénominateurs. Que pouvez-vous dire ?

Exercice 12. — Création de bases —

1. Ecrire un algorithme permettant de tester si une famille de vecteurs de $\mathbb{Z}^n$ (représentée par une matrice à n lignes) peut être complétée en une base de $\mathbb{Z}^n$.
2. Ecrire un algorithme permettant de compléter une famille de vecteurs de $\mathbb{Z}^n$ en une base de $\mathbb{Z}^n$ après avoir vérifié que cela était possible.
3. Tester les deux algorithmes précédents sur les exemples suivants :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} ; \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix} \right\} .$$

Exercice 13. — Un petit récapitulatif — Soient n et p deux entiers strictement positifs.

1. Etant donnée $A = ((a_{ij})) \in M_{n,p}(\mathbb{Z})$, expliquer comment utiliser Xcas pour :
   – trouver une base de l'image de A ;

– déterminer le noyau de A ;
– calculer le déterminant de A (lorsque $n = p$) ;
– calculer l'inverse de A (s'il existe) ;
– résoudre un système de congruences de la forme

$$\forall\ 1 \leq i \leq n,\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \equiv b_i \bmod m_i\ .$$

2. Appliquer les quatre premiers algorithmes à la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \\ 8 & 11 & 15 & -1 \end{pmatrix}$.

Décomposition de Dunford

Exercice 14. —
Soit K un corps de caractéristique nulle et soit $P(X) \in K[X]$ un polynôme sans facteur carré.

1. Ecrire un algorithme permettant de vérifier que P est sans facteur carré.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, P' admet un inverse modulo P^n.
3. Ecrire un algorithme prenant en entrée un entier $n \geq 0$ et un polynôme sans facteur carré P, et renvoyant l'inverse $v_n \in K[X]$ de P' modulo P^n.
4. Pour tout $n \geq 1$, notons $v_n \in K[X]$ l'inverse modulo P^n de P'. Posons $P_1(X) = X$ et, pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1}(X) = P_n(X) - v_n(X)P(P_n(X))$. Montrer que l'on a :

$$\forall\ n \geq 1,\ P(P_n(X)) \equiv 0 \bmod P^n(X)\ .$$

Exercice 15. — Décomposition de Dunford et lemme de Hensel —
Soit M une matrice carrée à coefficients rationnels, dont on note χ_M le polynôme caractéristique.

1. Déterminer un entier $m \geq 0$ et un polynôme sans facteur carré $P \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P^m(M) = 0$.
2. A l'aide de l'exercice précédent, on construit un polynôme $P_m \in \mathbb{Q}[X]$ vérifiant $P(P_m) \equiv 0 \bmod P^m$.
3. Montrer que $D := P_m(M)$ est diagonalisable et que $N := M - D$ est nilpotente.
4. En déduire un algorithme permettant de calculer la décomposition de Dunford de M sans connaître à priori ses valeurs propres.
5. Construire une matrice $M \in M_{11,11}(\mathbb{Q})$ de polynôme minimal $X^2(X+1)^3(X-1)^5$ et de polynôme caractéristique $X^3(X+1)^3(X-1)^5$, puis lui appliquer l'algorithme précédent.

Exercice 16. — Décomposition de Dunford et méthode de Newton — Soit M une matrice carrée à n lignes et à coefficients rationnels. Supposons que $P \in \mathbb{Q}[X]$ soit un polynôme à racines simples dont la puissance n-ième annule M.

1. Vérifier que la procédure suivante a un sens : *on définit une suite de matrices $(M_n)_{n\geq 0}$ en posant $M_0 := M$ et, pour tout $n \geq 0$, $M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1}$. Cette suite se stabilise au plus tard à l'étape n, et si l'on pose $D := M_n$ et $N := M - D$, alors $M = D + N$ est la décomposition de Dunford de M.*
   En particulier, on justifiera l'inversibilité de $P'(M_n)$ et l'on expliquera pourquoi son inverse est un polynôme en M_n, le polynôme étant indépendant de $n \geq 1$.
2. En déduire un deuxième algorithme permettant de calculer la décomposition de Dunford de M.
3. Comparer cet algorithme à celui obtenu dans l'exercice précédent. Lequel vous paraît être le plus efficace ?

Exercice 17. — Décomposition de Dunford et méthode de Jordan —
Soit M une matrice carrée à coefficients rationnels.

1. Ecrire un algorithme renvoyant la décomposition de Dunford de M à l'aide de la commande `jordan`.
2. Le comparer aux deux algorithmes obtenus précédemment. Lequel vous paraît être le plus efficace ?