Documents autorisés : uniquement le cours. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie. L'utilisation d'un résultat du cours doit être mentionnée explicitement.

Barème indicatif (Exercices 1, 2 ; Problème) : 2 points, 4 points ; 14 points.

Algèbre avancée

Examen partiel (durée : 2 heures)

Exercice 1

Soit K un corps et $n \geqslant 1$ un entier. On note $K(T_1, \dots, T_n)$ le corps des fractions rationnelles en n indéterminées à coefficients dans K. Soit L un sous-corps de $K(T_1, \dots, T_n)$ contenant K. On suppose que $\operatorname{degtr}(L/K) = n$. Montrer que l'extension $K(T_1, \dots, T_n)/L$ est finie.

Exercice 2

Soit L/K une extension de corps. On suppose que L/K est engendrée par une racine primitive n-ième de l'unité ζ, où $n \geqslant 1$ est un entier non divisible par la caractéristique de K. Soit $m \geqslant 1$ un diviseur de n. On note M la sous-extension de L/K engendrée par une racine primitive m-ième de l'unité.

1. Montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(L/K) \arrow[r, "\chi_n"] \arrow[d, "\alpha"'] & (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times \arrow[d, "\beta"] \\
\mathrm{Gal}(M/K) \arrow[r, "\chi_m"] & (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times
\end{tikzcd}$$

   où les flèches horizontales sont les caractères cyclotomiques, α est l'aplication de restriction à M, et β est la réduction modulo m.

2. Expliciter ce diagramme lorsque $K = \mathbf{F}_2$, $L = \mathbf{F}_{16}$, $n = 15$ et $m = 3$ (on donnera notamment l'image des automorphismes de Frobenius).

Problème – Équations bicarrées

Dans ce problème, on étudie le groupe de Galois du polynôme $P = X^4 + aX^2 + b$, où $a, b \in \mathbf{Q}$ sont des nombres rationnels. Dans toute la suite, on suppose que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$.

On note $\pm\alpha, \pm\beta$ les racines de P dans $\mathbf{C}$. Soit K le corps de décomposition de P dans $\mathbf{C}$, et soit $G = \mathrm{Gal}(P) = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ le groupe de Galois de P.

1. Montrer que $[K : \mathbf{Q}]$ est égal à 4 ou 8.
   On pourra étudier le degré de β sur $\mathbf{Q}(\alpha)$.
2. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe du groupe diédral D_4 d'ordre 8.
3. Montrer que G est isomorphe à l'un des trois groupes suivants :

$$\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \quad D_4.$$

4. Montrer que $\alpha^2 - \beta^2 \notin \mathbf{Q}$.
5. Montrer que G possède un élément d'ordre 4 si et seulement si il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\alpha) = \beta$ et $\sigma(\beta) = -\alpha$.
6. On suppose dans cette question $G \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. Montrer que $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbf{Q}$ et $\alpha\beta \notin \mathbf{Q}$.
7. On suppose dans cette question $G \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Montrer que $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbf{Q}$ et $\alpha\beta \in \mathbf{Q}$.
8. On suppose dans cette question $G \cong D_4$. Montrer que $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbf{Q}$ et $\alpha\beta \notin \mathbf{Q}$.

Dans les questions 9 et 10, on considère le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + 2$.

9. Montrer que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$ et déterminer son groupe de Galois.
10. Dresser la liste des sous-corps de K. Lesquels sont galoisiens sur $\mathbf{Q}$?
11. Trouver des polynômes irréductibles de degré 4 sur $\mathbf{Q}$ correspondant à chacun des trois cas de la question 3.

Question subsidiaire. Si l'on choisit des entiers $a, b \in \mathbf{Z}$ « au hasard », quel sera, le plus probablement, le groupe de Galois du polynôme $X^4 + aX^2 + b$?