Feuille TD 1 - Faisceaux

Exercice 1. Soit X un espace topologique et soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux faisceaux en groupes abéliens sur X. Pour tout ouvert $U \subseteq X$ on note $\mathcal{F}|_U$ et $\mathcal{G}|_U$ les restrictions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, respectivement, à l'ouvert U. Montrez que l'association

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}/U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

définit un faisceau en groupes abéliens sur X.

Exercice 2. Soit R un anneau (commutatif et unitaire) et soit X un espace topologique ; étant donnés deux faisceaux en R-modules $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, est-ce que l'association

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_R \mathcal{G}(U) \tag{1}$$

définit un faisceau en R-modules ? Et si on remplace R par un faisceau en anneaux $\mathcal{R}$ et on suppose que $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ soient deux $\mathcal{R}$-modules, à savoir deux faisceaux en groupes abéliens tels que pour tout ouvert U les groupes $\mathcal{F}(U)$ et $\mathcal{G}(U)$ sont munis d'une structure de $\mathcal{R}(U)$-modules, celle-ci compatible avec les homomorphismes de restrictions - est-ce que l'association (1) devient un faisceau en $\mathcal{R}$-modules ?

Exercice 3 (Faisceau gratte-ciel)**.** Soit G un groupe abélien et soit X un espace topologique ; soient $x_1, \dots, x_d \in X$ des points de X et notons $S = \{x_1, \dots, x_d\}$. Considérons l'association

$$\mathcal{F}_{G,S} \colon U \mapsto \bigoplus_{x \in U} G \cdot x \subseteq \bigoplus_{x \in S} G \cdot x.$$

On définit des homomorphismes de restrictions, pour toute inclusion d'ouverts $V \subseteq U$,

$$\mathcal{F}_{G,S}(U) = \bigoplus_{x \in U} G \cdot x \xrightarrow{\oplus \mathrm{pr}} \mathcal{F}_{G,S}(V) = \bigoplus_{x \in V} G \cdot x$$

à travers les flèches de projection.

1. Montrer que $\mathcal{F}_{G,S}$ est un faisceau en groupes abéliens : on l'appelle le *faisceau gratte-ciel concentré en (* ou *au-dessus de) S*.
2. En supposant que chaque $x \in S$ soit fermé, décrire les fibres $(\mathcal{F}_{G,S})_z$ pour tout $z \in X$.
3. Trouver un contre-exemple à la conclusion du point précédent lorsqu'on affaibli l'hypothèse que les points dans S soient tous fermés.

Exercice 4 (Espaces irréductibles)**.** Un espace topologique X est dit irréductible si chaque écriture $X = K_1 \cup K_2$ avec les K_i fermés entraîne que soit $K_1 = X$ soit $K_2 = X$.

Tout d'abord, observez qu'un espace irréductible est en particulier connexe. Ensuite, montrez que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. X est irréductible
2. Toute paire d'ouverts non-vides $U_1 \neq \emptyset \neq U_2 \subseteq X$ a une intersection non-vide, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
3. Tout ouvert U est connexe.
4. Tout ouvert non-vide $U \neq \emptyset$ est dense.
5. Tout ouvert U est irréductible.

Montrez enfin que le préfaisceau constant sur un espace X est déjà un faisceau lorsque X est irréductible.

Exercice 5. On dit qu'un espace topologique X est

(i) un espace de Kolmogorov (ou un espace qui satisfait à l'axiome T_0) si pour tout couple de points $x \neq y$ de X il existe un ouvert U qui en contient un des deux mais pas l'autre.

(ii) un espace qui satisfait à l'axiome T_1 si pour tout couple de points $x \neq y$ de X il existe un ouvert U_x qui contient x et non contient pas y, et un ouvert U_y qui contient y mais ne contient pas x.

1. Trouvez un exemple d'un espace topologique qui satisfait à T_0 mais ne satisfait pas à T_1.
2. Montrez que pour tout anneau A, l'espace topologique $\mathrm{Spec}(A)$ est un espace de Kolmogorov. Déduisez-en que tout schéma est un espace de Kolmogorov.
3. Déterminez les conditions sur A afin que $\mathrm{Spec}(A)$ satisfasse à l'axiome $T1$.

Exercice 6 (Liu, exercice 2.1.1)**.** Déterminez la structure topologique de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\![T]\!])$.

Exercice 7 (Liu, exercice 2.1.9)**.** Soit k un corps et soit A une k-algèbre de type fini.

1. Montrez que si A/k est finie (c'est-à-dire, qu'elle est un k-espace vectoriel de dimension finie), alors tout premier de A est maximal. Déduisez-en que $\operatorname{Spec}(A)$ est fini de cardinal borné par $\dim_k(A)$. (Conseil : remarquez que chaque idéal de A est en particulier un k-espace vectoriel).
2. Montrez que $\operatorname{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n])$ est infini dès lors que $n \geq 1$.
3. Prouvez l'équivalence

$$\operatorname{Spec}(A) \text{ est fini } \iff A/k \text{ est finie.}$$

Exercice 8 (Liu, exercice 2.2.8)**.** Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique X et supposons d'avoir un faisceau $\mathcal{F}_i$ sur U_i pour tout $i \in I$. Supposons aussi qu'il y ait des isomorphismes

$$\phi_{ij} \colon \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_j|_{U_j \cap U_i}$$

pour tout couple $i, j \in I$, et que ces isomorphismes vérifient $\phi_{ii} = \mathrm{id}$ et $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$ pour tous $i, j, k \in I$.

Montrez qu'il existe *un unique* faisceau $\mathcal{F}$ sur X et des isomorphismes

$$\psi_i \colon \mathcal{F}|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_i$$

tels que $\psi_j = \phi_{ij} \circ \psi_i$.

Le faisceau $\mathcal{F}$ est le *recollement des faisceaux* $\mathcal{F}_i$ à travers les ϕ_{ij}.

Exercice 9. Soit X un espace topologique. Un faisceau $\mathcal{F}$ sur X est dit *localement constant* s'il existe un recouvrement de X par des ouverts U_i tel que $\mathcal{F}|_{U_i}$ soit isomorphe à un faisceau constant pour tout i.

1. Montrer que, sur un espace topologique irréductible, un faisceau est localement constant si et seulement s'il est constant.
2. Réciproquement, soit X un espace topologique connexe et supposons qu'il existe un faisceau $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F}(X)$ contienne au moins deux éléments et que l'application de restriction $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ soit bijective pour tout ouvert non vide $U \subseteq X$. Montrer que X est irréductible.
3. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. Considérons un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ et une matrice carrée A de taille n à coefficients dans $\mathcal{O}(U)$. On définit un sous-préfaisceau $\mathcal{S}$ de $\mathcal{O}$ n en posant

$$\mathcal{S}(V) = \{y \in \mathcal{O}(V)^n | y'(z) = A(z)y(z) \text{ pour tout } z \in V\}$$

pour tout ouvert $V \subseteq U$. Démontrer que $\mathcal{S}$ est un faisceau sur U en $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie qui est localement constant.

4. Donner un exemple de faisceau localement constant non constant sur un espace topologique X.