Feuille TD 2 - Schémas

Exercice 1. Soit A un anneau intègre principal et $X = \mathrm{Spec}(A)$. Montrez que tout sous-schéma ouvert $U \subseteq X$ est affine.

Généralisez ce résultat en affaiblissant l'hypothèse que A soit principal, en supposant l'existence d'un entier $h \geq 1$ tel que pour tout idéal $I \subseteq A$, l'idéal I^h soit principal.

Repensez à l'exemple vu en cours du schéma $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T])$ et de son ouvert $U = X \setminus \{\mathfrak{p}\}$ où $\mathfrak{p} = (11, T)$: est-ce que U est affine ?

Exercice 2 (Liu, ex. 2.3.5)**.** Soit X un schéma tel que pour tout schéma *affine* Z le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Z(Z))$$

est bijectif ; montrez que X est un schéma affine.

Exercice 3 (Liu, ex. 2.3.7)**.** Soit X un schéma sur un corps k et soit $\varphi\colon k[T_1, \dots, T_n] \to \mathcal{O}_X(X)$ un morphisme de k-algèbres, dont on dénote par

$$f\colon X \to \mathbb{A}^n_k$$

le morphisme de schémas associé. Montrez que pour tout point $x \in X(k)$, l'idéntification $\mathbb{A}^n_k(k) \cong k^n$ induit une idéntification

$$f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$$

où $f_i = \varphi(T_i)$ et $f_i(x)$ dénote l'image de f_i dans $\kappa(x) \cong k$.

Exercice 4 (Liu, ex. 2.3.14)**.** On dit qu'un schéma est *quasi-compacte* s'il est quasi-compacte en tant qu'espace topologique, c'est-à-dire que de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini. Montrez qu'un schéma est compacte si et seulement s'il est réunion finie de schémas affines.

Dans les exercices qui suivent, k dénote un corps, de caractéristique 0 par simplicité.

Exercice 5 (Points doubles - voir Eisenbud&Harris, ex. I-43)**.** Soit $S = \operatorname{Spec}(k[X,Y]/XY)$ et p le point fermé correspondant à l'idéal maximal (X,Y) ; soit $\varphi\colon X \to \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec}(k[T])$ correspondant à $T \mapsto X+Y$.

(i) Dessinez les données X, p, φ lorsque $k = \mathbb{R}$.

Étant donné un morphisme de schémas affines $\phi\colon \operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(B)$ correspondant au morphisme d'anneaux $f\colon B \to A$, on appelle *fibre* de ϕ au-dessus d'un sous-schéma fermé $\operatorname{Spec}(A/I) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ le sous-schéma fermé $\operatorname{Spec}(B/f(I)) \subseteq \operatorname{Spec}(B)$.

(ii) Montrez que la fibre de φ au-dessus du point $q_a = (T-a) \in \mathbb{A}^1_k$ est isomorphe au schéma $\operatorname{Spec}(k \times k)$ lorsque $a \neq 0$: décrivez l'espace topologique sous-jacent à $\operatorname{Spec}(k \times k)$.

(iii) Montrez que la fibre de φ au-dessus du point $q_0 = (T) \in \mathbb{A}^1_k$ est isomorphe au schéma $\operatorname{Spec}(k[u]/u^2)$: montrez que $\operatorname{Spec}(k[u]/u^2)$ et $\operatorname{Spec}(k)$ ne sont pas isomorphes alors que leurs espaces topologiques sous-jacents sont homéomorphes.

(iv) Montrez que avec la notion de fibre ainsi définie, l'espace topologique sous-jacent à la fibre coïncide avec la pré-image au sens ensembliste.

Comment expliquez-vous la différence entre le cas $a \neq 0$ et $a = 0$?

Exercice 6 (Eisenbud&Harris, ex. I-44 : droite affine avec deux origines)**.** Considérons les schémas $Y = \operatorname{Spec}(k[S]), Z = \operatorname{Spec}(k[T])$. Posons $U = D(S) \subseteq Y, V = D(T) \subseteq X$ et soit

$$\psi\colon V \longrightarrow U$$

le morphisme de schémas qui correspond au morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_Y(U) = k[S,S^{-1}] \to \mathcal{O}_X(V) = k[T,T^{-1}]$ qui envoie $S \mapsto T$.

Montrez que le schéma X obtenu en recollant Y et Z le long de ψ n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$, mais qu'il est isomorphe à la "droite affine avec l'origine doublée". S'agit-il d'un schéma affine ?