Feuille TD 3 - Sous-schémas et schémas projectifs

Exercice 1 (Liu, ex. 2.3.8)**.** Soit X un schéma au-dessus d'un anneau A et soient $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ tels que $(f_i)_x$ engendrent $\mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$.

(i) Montrez que X est réunion des

$$X_{f_i} = \{x \in X \text{ tels que } (f_i)_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\},$$

et qu'ils sont ouverts. On les muni de la structure de sous-schémas ouverts.

(ii) Montrez l'existence d'un morphisme $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n_A$ tel que $\varphi^{-1}(D_+(T_i)) = X_{f_i}$ et tel que $\varphi|_{X_{f_i}}$ corresponde au morphisme

$$A[T_i^{-1}T_j]_{0\leq j\leq n} \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_{f_i})$$

induit par $T_i^{-1}T_j \mapsto f_i^{-1}f_j$.

Exercice 2 (Liu, ex. 2.3.10)**.** Soit A un anneau et $X = \mathbb{P}^n_A$. Montrez que $\mathcal{O}_X(X) = A$, et déduisez-en que X est affine si et seulement si $n = 0$.

Exercice 3 (Schémas locaux - Eisenbud&Harris, ex. II-3)**.** Regardons le schéma affine $S = \operatorname{Spec}(k[X,Y]/Y^2 - X^3 - X^2) \subseteq \mathbb{A}^2_k$, où k est un corps.

(i) Montrez que S est irréductible et dessinez-le lorsque $k = \mathbb{R}$.

(ii) Considérons les inclusions d'anneaux $k[X,Y] \subseteq k[X,Y]_{(X,Y)} \subseteq k[\![X,Y]\!]$ et les inclusions correspondantes

$$\operatorname{Spec}(k[\![X,Y]\!]) \subseteq \operatorname{Spec}(k[X,Y]_{(X,Y)}) \subseteq \mathbb{A}^2_k.$$

Aussi, notons $\mathscr{S} = \operatorname{Spec}(k[\![X,Y]\!]) \cap S$ et $S_0 = \operatorname{Spec}(k[X,Y]_{(X,Y)}) \cap S$. Montrez que S_0 est irréductible alors que $\mathscr{S}$ ne l'est pas (utilisez que

$$t = X + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{8}X^3 + \dots$$

est une racine carrée de $X^2 + X^3$ dans $k[\![X,Y]\!]$).

(iii) Quelle est l'image du point $Y - t \in \mathrm{Spec}(k[\![X, Y]\!])$ par l'immersion $\mathrm{Spec}(k[\![X, Y]\!]) \hookrightarrow \mathbb{A}^2_k$?

Exercice 4. Soit k un corps et

$$T = \mathrm{Spec}\big(k[X, Y]/(X^2, XY)\big) .$$

(i) Est-ce que T est un schéma réduit ?

(ii) Déterminez les composantes irréductibles de T et dessinez T lorsque $k = \mathbb{R}$. Trouvez-vous un lien parmi les réponses aux deux premières questions ?

(iii) Considérez le point

$$P = \mathrm{Spec}\big(k[X, Y]/(X^2, Y)\big) = \mathrm{Spec}\Big(\big(k[X, Y]/(X^2, XY)\big)/Y\Big) \hookrightarrow T$$

et essayez de comprendre en quel sens P est l'intersection dans $\mathbb{A}^2_k$ de la droite $L = \mathrm{Spec}(k[u])$ et de la parabole $C = \mathrm{Spec}(k[X, Y]/X^2 - Y)$: en quoi l'information précédente est plus fine que “P est le point double $\mathrm{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$” ?

Exercice 5 (Liu, ex. 3.4.2)**.** Soit X un schéma et $x \in X$. Montrez que l'image du morphisme

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow X$$

est l'ensemble des points qui spécialisent à x (je vous rappelle qu'on dit qu'un point P spécialise à x si $x \in \overline{\{P\}}$, la clôture de P).

Explicitez ce résultat lorsque $X = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[T, S])$ et x est l'idéal premier (T).

Exercice 6 (Liu, ex. 2.3.4)**.** Soit X un schéma et $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Montrez que l'association

$$U \mapsto f|_U \cdot \mathcal{O}_X(U)$$

où U parcourt les ouverts affines de X définit un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$, dénoté $f\mathcal{O}_X$.

Montrez ensuite que

$$\mathrm{Supp}(f\mathcal{O}_X) = \{x \in X | (f\mathcal{O}_X)_x \neq 0\}$$

est fermé dans X.

Exercice 7 (Liu, ex. 3.4.9)**.** Soit X un schéma noetherien. Montrez que les ensembles

$$X^{\mathrm{red}} = \{x \in X \text{ tels que } \mathcal{O}_{X,x} \text{ est réduit}\}$$

et

$$X^{\mathrm{int}} = \{x \in X \text{ tels que } \mathcal{O}_{X,x} \text{ est intègre}\}$$

sont ouverts.

Exercice 8. Soit X un schéma, $\eta \in X$ un point et x une spécialisation de η. Montrez que pour tout ouvert U tel que $x \in U$ on a $\eta \in U$: de façon imagée, on ne peut pas détacher un point de ses spécialisations ou, encore, η est infiniment proche - ou voisin - de toutes ses spécialisations.