

TD 4 - Faisceaux quasi-cohérents et cohérents

Exercice 1. Soient X un schéma et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. Montrer que $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent si et seulement si pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}(U_i)^\sim$.

Exercice 2. 1. Soient $X = \text{Spec } A$ et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent ;
- (b) il existe un A -module M tel que $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$;
- (c) pour tout $f \in A$, l'application naturelle $\mathcal{F}(X)[\frac{1}{f}] \rightarrow \mathcal{F}(D(f))$ est un isomorphisme de $A[\frac{1}{f}]$ -modules.

2. Soit $X = \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$ la droite affine sur $\mathbf{C}$. Soit $\mathcal{F}$ le $\mathcal{O}_X$ -module défini par

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbf{C} \text{ holomorphe}\}$$

pour tout ouvert Zariski U de $\mathbf{C}$. Est-il quasi-cohérent ?

Exercice 3. Soit A un anneau de valuation discrète et $X = \text{Spec } A$. On note η (resp. x) le point générique (resp. fermé) de X . Soit $K = \text{Frac}(A)$.

- 1. Montrer que se donner un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ revient à se donner un A -module M et un K -espace vectoriel V munis d'une application A -linéaire $M \rightarrow V$.
- 2. Montrer que $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent si et seulement si l'application canonique $\theta : M \otimes_A K \rightarrow V$ est un isomorphisme.
- 3. On suppose que $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent. Montrer que $\mathcal{F}$ est cohérent si et seulement si M est un A -module de type fini.

Exercice 4 (Liu, Prop. 5.1.15). On rappelle que si X est un espace localement annelé, les immersions fermées à valeurs dans X sont, à équivalence près, en bijection avec les faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}_X$.

Soit X un schéma.

1. Soit $i : Z \rightarrow X$ un sous-schéma fermé de X . Montrer que $\ker i^\#$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$.
2. Montrer que les sous-schémas fermés de X sont, à équivalence près, en bijection avec les idéaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_X$.
3. Supposons $X = \operatorname{Spec} A$, où A est un anneau de valuation discrète. Montrer sur un exemple qu'il existe un idéal I de $\mathcal{O}_X$ tel que l'espace annelé $V(I)$ ne soit pas un schéma.

Exercice 5. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas.

1. Montrer que $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ induit un morphisme de faisceaux d'anneaux $f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$.
2. Si $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module, on pose

$$f^* \mathcal{G} = f^{-1} \mathcal{G} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Montrer que $f^* \mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module et que pour tout $x \in X$, on a un isomorphisme canonique $(f^* \mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y, f(x)}} \mathcal{O}_{X, x}$.

3. Supposons $\mathcal{G}$ quasi-cohérent. Soient U un ouvert affine de X et V un ouvert affine de Y tels que $f(U) \subset V$. Montrer que

$$f^* \mathcal{G}|_U \cong (\mathcal{G}(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_X(U))^\sim$$

et en déduire que $f^* \mathcal{G}$ est quasi-cohérent.

Indication : on pourra écrire $\mathcal{G}(V)$ comme le conoyau d'une application entre modules libres.

4. Montrer que si $\mathcal{G}$ est de type fini, alors $f^* \mathcal{G}$ est de type fini.
5. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent. Montrer que si X est noethérien, alors le $\mathcal{O}_Y$ -module $f_* \mathcal{F}$ est quasi-cohérent.
6. Montrer que si f est fini et $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent et de type fini, alors $f_* \mathcal{F}$ est quasi-cohérent et de type fini.

Exercice 6 (Liu, ex. 5.1.2). Soit $X = \operatorname{Spec} A$, où A est un anneau intègre, de corps des fractions K . Soit $x_0 \in X$. Soit $\mathcal{F}$ le faisceau sur X défini par $\mathcal{F}(U) = K$ si $x_0 \in U$ et $\mathcal{F}(U) = 0$ sinon. Montrer que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module. Sous quelle condition est-il quasi-cohérent ?

Exercice 7. Soient X un schéma noethérien et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent.

1. Montrer que $\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X : \mathcal{F}_x \neq 0\}$ est fermé dans X .
2. Montrer que ce résultat peut être faux sans l'hypothèse de cohérence.

Exercice 8. Montrer que le faisceau des fonctions $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ n'est pas un faisceau d'anneaux cohérent.