TD 5 - Faisceaux quasi-cohérents et cohérents II

Exercice 1. Soit X un schéma localement noethérien. Un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ est dit *libre de rang* n s'il est isomorphe à $\mathcal{O}_X^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est *localement libre de rang* n s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}|_{U_i}$ est libre de rang n.

1. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Montrer que si $\mathcal{F}_x$ est libre de rang n sur $\mathcal{O}_{X,x}$ alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathcal{F}|_U$ est libre de rang n.
2. En déduire que $\mathcal{F}$ est localement libre de rang n si et seulement si $\mathcal{F}_x$ est libre de rang n sur $\mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$.
3. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang n. Montrer que $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ est localement libre de rang n.
4. Montrer que le morphisme canonique $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}^\vee \to \mathcal{O}_X$ est un isomorphisme si $n = 1$.
5. Soit $\mathrm{Pic}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang 1. Montrer que le produit tensoriel munit $\mathrm{Pic}(X)$ d'une structure de groupe abélien, dont l'élément neutre est la classe de $\mathcal{O}_X$. Montrer que l'inverse de la classe de $\mathcal{L}$ est la classe de $\mathcal{L}^\vee$.

Exercice 2. Soit X un schéma intègre noethérien. On dit que X est *de Dedekind* si pour tout ouvert affine U de X, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est de Dedekind.

1. Montrer que pour tout corps de nombres K, le schéma $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est de Dedekind.
2. Montrer que pour tout corps k, le schéma $\mathbf{P}^1_k$ est de Dedekind.
3. Soit X un schéma de Dedekind. On note $K = \mathcal{O}_{X,\eta}$ le corps des fonctions de X. Montrer que pour tout point fermé $x \in X^0$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est de valuation discrète et s'identifie à un sous-anneau de K.
4. Montrer que si U est un ouvert non vide de X, on a

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U \cap X^0} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Pour tout $x \in X^0$, on note $v_x : K^\times \to \mathbf{Z}$ la valuation normalisée, et π_x une uniformisante de $\mathcal{O}_{X,x}$. Soit $D = (n_x)_{x \in X^0} \in \mathbf{Z}^{(X_0)}$ une famille presque nulle d'entiers relatifs. On définit un préfaisceau $\mathcal{L}_D$ sur X en posant, pour tout ouvert non vide U de X,

$$\mathcal{L}_D(U) = \{s \in K : v_x(s) \geq n_x \text{ pour tout } x \in U \cap X^0\},$$

les applications de restriction étant données par les injections canoniques.

5. Montrer que $\mathcal{L}_D$ est un $\mathcal{O}_X$-module.
6. Soit $S = \{x \in X^0 : n_x \neq 0\}$. Montrer que pour tout $x \in S$, il existe un ouvert affine U_x contenant x et un isomorphisme $\mathcal{L}_D|_{U_x} \cong \mathcal{O}_X|_{U_x}$.
7. Montrer que $\mathcal{L}_D$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1.
8. Montrer que $\mathcal{L}_D \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_{D'} \cong \mathcal{L}_{D+D'}$.
9. Soit $f \in K^\times$. On pose $\operatorname{div}(f) = (v_x(f))_{x \in X^0}$. Montrer que la mutliplication par f induit un isomorphisme $\mathcal{L}_D \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}_{D+\operatorname{div}(f)}$.

Exercice 3 (Liu, Prop. 5.1.31)**.** Soit A un anneau, et X un A-schéma.

1. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_A$ un morphisme de A-schémas. Montrer que $f^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n_A}(1)$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1, engendré par $n+1$ sections globales.
2. Réciproquement, soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1 engendré par $n+1$ sections globales $s_0, \ldots, s_n$. Montrer qu'il existe un morphisme $f : X \to \mathbf{P}^n_A$ tel que $\mathcal{L} \cong f^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n_A}(1)$ et $f^*T_i = s_i$.

Exercice 4 (Liu, ex. 5.1.15)**.** Soit X un schéma localement noethérien, et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Pour tout $x \in X$, on pose

$$\phi(x) = \dim_{k(x)}(\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)).$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. À l'aide du lemme de Nakayama, montrer que l'ensemble $\{x \in X : \phi(x) \leq n\}$ est ouvert dans X.
2. En déduire que si X est irréductible, de point générique ξ, alors $\phi(x) \geq \phi(\xi)$ pour tout $x \in X$.
3. Soit A un anneau et $\alpha : A^n \to M$ une application A-linéaire. On suppose que pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, le morphisme

$$\alpha \otimes \mathrm{id}_{k(\mathfrak{p})} \, k(\mathfrak{p})^n \to M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p})$$

est injectif. Montrer que $\ker(\alpha) \subset N^n$, où N est le nilradical de A.

4. Supposons que ϕ est constante égale à n sur X, et que X est réduit. Montrer que $\mathcal{F}$ est localement libre de rang n.
5. Montrer sur un exemple que la propriété précédente est fausse si X n'est pas réduit.

Exercice 5 (Liu, ex. 5.2.7)**.** Soit X un schéma. On note $\mathcal{O}_X^\times$ le faisceau de groupes abéliens $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)^\times$.

1. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X tel que pour tout $i \in I$, $\mathcal{L}|_{U_i}$ est libre, engendré par $e_i \in \mathcal{L}(U_i)$. Montrer qu'il existe $f_{i,j} \in \mathcal{O}_X^\times(U_{ij})$ tel que $e_i|_{U_{ij}} = f_{i,j} \cdot e_j|_{U_{ij}}$ pour tout $i, j \in I$.
2. Soit $f = (f_{i,j})_{i,j \in I} \in \mathcal{C}'^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$. Montrer que l'image de f dans $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$ est indépendante du choix des e_i.
3. Montrer que l'image $\phi(\mathcal{L})$ de f dans $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ ne dépend que de $\mathcal{L}$.
4. Montrer que $\phi(\mathcal{L}) = 1$ si et seulement si $\mathcal{L}$ est libre.
5. Montrer que l'application $\mathcal{L} \mapsto \phi(\mathcal{L})$ induit un isomorphisme de groupes $\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ (pour la surjectivité, on pourra procéder par recollement, cf. TD 1, exercice 8).
6. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Montrer que $\mathcal{L} \mapsto f^*\mathcal{L}$ induit un morphisme de groupes $\mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$. Montrer de plus que le morphisme $\mathcal{O}_Y^\times \to f_*\mathcal{O}_X^\times$ induit un morphisme $H^1(Y, \mathcal{O}_Y^\times) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$, qui coïncide avec le morphisme précédent via l'identification de la question précédente.