TD 6 - Schémas réguliers

Exercice 1. On note S^1 la sphère de dimension 1, munie de la topologie usuelle. Soit $\mathcal{F} = \mathbf{Z}$ le faisceau sur S^1 des fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbf{Z}$. Soit $\mathfrak{U}$ le recouvrement de S^1 par deux demi-cercles ouverts U, V, qui s'intersectent de chaque côté. Montrer que $H^1(\mathfrak{U}, \mathbf{Z})$ est isomorphe au conoyau de l'application linéaire

$$\begin{aligned} d : \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{F}(V) &\to \mathcal{F}(U \cap V) \\ (f, g) &\mapsto f|_{U\cap V} - g|_{U\cap V}. \end{aligned}$$

En déduire $H^1(\mathfrak{U}, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$.

On peut montrer que $H^1(S^1, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$.

Exercice 2. Soit k un corps. Le but de cet exercice est de calculer la cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}(d)$ sur $\mathbf{P}^1_k$. On note $\mathfrak{U}$ le recouvrement de $X = \mathbf{P}^1_k$ par les ouverts affines standard $U_0 = D_+(T_0)$ et $U_1 = D_+(T_1)$.

1. Montrer que $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe au conoyau de l'application

$$\mathcal{O}_X(U_0) \oplus \mathcal{O}_X(U_1) \xrightarrow{d} \mathcal{O}_X(U_0 \cap U_1)$$

   donnée par $d(f_0, f_1) = f_0|_{U_0\cap U_1} - f_1|_{U_0\cap U_1}$.
2. En déduire $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = 0$ puis $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.
   On admettra que si $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur un schéma noethérien séparé X, et si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement de X par des ouverts affines, alors on a un isomorphisme $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong H^1(X, \mathcal{F})$.
3. Soit $d \in \mathbf{Z}$. Montrer que le $\mathcal{O}_{U_i}$-module $\mathcal{O}(d)|_{U_i}$ est libre de rang 1, engendré par la section T_i^d.
4. Écrire $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}(d))$ comme le conoyau d'une application linéaire et en déduire

$$\dim_k H^1(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(d)) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \geq -1 \\ |d| - 1 & \text{si } d \leq -2. \end{cases}$$

Exercice 3. Soit k un corps. Montrer que le schéma $\operatorname{Spec} k[x, y, z]/(x^2 - yz)$ n'est pas régulier et préciser le(s) point(s) singulier(s).

Exercice 4. Soit $\mathcal{O}_K$ un anneau de valuation discrète, d'uniformisante t et de corps des fractions K. On suppose $\mathrm{car}(K) \neq 2, 3$. Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'anneau $K[x,y]/(y^2 + x^3 + t^n)$ est régulier.
2. Soit $A = \mathcal{O}_K[x,y]/(y^2+x^3+t^n)$. Montrer que la fibre spéciale du $\mathcal{O}_K$-schéma $\operatorname{Spec} A$ est réduite et singulière.
3. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A engendré par x, y et t. Montrer que $A_{\mathfrak{m}}$ est régulier si et seulement si $n = 1$.

Exercice 5. Soit k un corps algébriquement clos et $n \geq 1$ un entier. Montrer que la courbe $C = V_+(x^n + y^n - z^n) \subset \mathbf{P}^2_k$ est régulière si et seulement si n n'est pas divisible par $\mathrm{car}(k)$.

Exercice 6 (Cône tangent, Eisenbud-Harris III.2.4)**.** Soit X un schéma, et soit $x \in X$. Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ et k le corps résiduel de X en x. On pose

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}.$$

Par définition, le *cône tangent de X en x* est le schéma $C_{X,x} = \operatorname{Spec} A$.

1. Montrer que A est une k-algèbre graduée.
2. Montrer que A est engendrée, en tant qu'algèbre, par sa partie homogène de degré 1.
3. En déduire que A est un quotient de l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. (On rappelle que si V est un k-espace vectoriel, l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(V)$ est la k-algèbre $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Sym}^n V$. Si k est infini et V est de dimension finie, alors $\mathrm{Sym}(V^*)$ s'identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales sur V. Par exemple $\mathrm{Sym}(k^n)$ s'identifie naturellement à $k[X_1, \ldots, X_n]$.)
4. On appelle *schéma associé à* $T_{X,x}$ le schéma $\overline{T_{X,x}} = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(T^*_{X,x}))$. En supposant $\dim_k T_{X,x} = n$, justifier cette terminologie.
5. Montrer que le cône tangent $C_{X,x}$ s'identifie à un sous-schéma fermé de $\overline{T_{X,x}}$.
6. Soit $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(y^2-x^2-x^3)$. Montrer que $C_{X,x}$ est isomorphe à $\operatorname{Spec} k[x,y]/(y^2-x^2)$ et est une réunion de deux droites affines.
7. Plus généralement, étant donné un polynôme $P \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tel que $P(0, \ldots, 0) = 0$, montrer que le cône tangent de $V(P)$ en l'origine est un sous-schéma fermé de $\mathbf{A}^n_k$ et le décrire en termes de P.
8. Déterminer le cône tangent en l'origine de la courbe $C \subset \mathbf{A}^3_k$ définie comme l'image de $\phi : \mathbf{A}^1_k \to \mathbf{A}^3_k$ donnée par $\phi(t) = (t^3, t^4, t^5)$.