TD 7 - Différentielles de Kähler

Exercice 1. Soit L/K une extension finie de corps.

1. On suppose que L/K est séparable. Montrer que $\Omega^1_{L/K} = 0$.
2. On suppose que L/K est monogène et inséparable. Montrer que $\Omega^1_{L/K} \cong L$.
3. Montrer que L/K est séparable si et seulement si $\Omega^1_{L/K} = 0$.

Exercice 2.

1. Montrer que si $X = \mathbf{A}^n_S$, alors $\Omega^1_{X/S} \cong \mathcal{O}_X^n$.
2. Soit A un anneau commutatif. On note $(T_0 : T_1)$ les coordonnées homogènes sur $X = \mathbf{P}^1_A$. Montrer que $T_0^2 d(T_1/T_0)$ définit une section globale partout non nulle de $\mathcal{O}_X(2) \otimes \Omega^1_{X/A}$.
3. En déduire $\Omega^1_{X/A} \cong \mathcal{O}_X(-2)$.

Exercice 3. Soit $X \to Y$ un morphisme, et soit $Y \to Z$ une immersion ouverte ou fermée. Montrer que $\Omega^1_{X/Z} \cong \Omega^1_{X/Y}$.

Exercice 4. Soient X, Y des S-schémas. On note $p : X \times_S Y \to X$ et $q : X \times_S Y \to Y$ les projections canoniques. Montrer que $\Omega^1_{X \times_S Y/S} \cong p^*\Omega^1_{X/S} \oplus q^*\Omega^1_{Y/S}$.

Exercice 5. Soit k un corps. Soit $C = \operatorname{Spec} k[X,Y]/(F)$ une courbe affine telle que $C_{\overline{k}}$ est régulière. Notons $x, y, \partial_x F, \partial_y F$ les images canoniques de $X, Y, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}$ dans $A = k[X,Y]/(F)$.

1. Montrer que $\Omega^1_{D(\partial_x F)/k}$ est libre de rang 1, de base dy.
2. Montrer que C est la réunion des ouverts affines $D(\partial_x F)$ et $D(\partial_y F)$.
3. Montrer que $\Omega^1_{C/k}$ est un $\mathcal{O}_C$-module libre de rang 1.

Exercice 6. Soit k un corps de caractéristique $\neq 2, 3$.

Notons $(X : Y : Z)$ les coordonnées homogènes sur $\mathbf{P}^2_k$. On appelle *courbe elliptique* sur k un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^2_k$ de la forme

$$E = V_+(Y^2 Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3)$$

avec $a, b \in k$ tels que $E_{\overline{k}}$ est régulier. On note $O = (0 : 1 : 0) \in E(k)$.

1. Montrer que E est la réunion des ouverts principaux $U = E \cap D_+(Z)$ et $V = E \cap D_+(Y)$.
2. Montrer que $\Omega^1_{U/k}$ est un $\mathcal{O}_U$-module libre de rang 1, de base $\omega = \frac{dx}{2y}$.
3. Montrer que ω s'étend en une section partout non nulle de $\Omega^1_{E/k}$.
4. En déduire que le $\mathcal{O}_E$-module $\Omega^1_{E/k}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_E$.

Exercice 7. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas.

1. Soit U un ouvert de X. Montrer que $\Omega^1_{X/Y}|_U \cong \Omega^1_{U/Y}$.
2. Soit Y' un Y-schéma. Posons $X' = X \times_Y Y'$. Notons $p : X' \to X$ la première projection. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique $\Omega^1_{X'/Y'} \cong p^*\Omega^1_{X/Y}$.
3. Soit $Y \to Z$ un morphisme de schémas. Montrer qu'on a une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules
$$f^*\Omega^1_{Y/Z} \to \Omega^1_{X/Z} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0.$$