TD 8 - Faisceaux amples

Exercice 1. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Soient $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang fini. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique

$$f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \cong f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G}).$$

Exercice 2. Soit X un schéma noethérien. Montrer que le faisceau inversible $\mathcal{O}_X$ est engendré par ses sections globales, mais n'est en général pas ample.

Exercice 3. Soient X un schéma noethérien et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{L}$ est ample ;
2. $\mathcal{L}^{\otimes m}$ est ample pour tout $m \geq 1$;
3. il existe $m \geq 1$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes m}$ est ample.

Exercice 4. Soient X un schéma noethérien et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X.

1. Supposons qu'il existe des sections globales $s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{L}(X)$ telles que X_{s_i} est affine pour tout i et $X = \cup_{1 \leq i \leq r} X_{s_i}$. Montrer que $\mathcal{L}$ est ample.
   On pourra utiliser le lemme suivant : si $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur X, alors pour tout $s \in \mathcal{L}(X)$ et tout $g \in \mathcal{F}(X_s)$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $g \otimes (s^n|_{X_s})$ s'étend en une section de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ sur X.
2. Soit U un ouvert de X. Montrer que si $\mathcal{L}$ est ample, alors $\mathcal{L}|_U$ est ample.
   On pourra utiliser le fait, démontré en cours, que tout point possède un voisinage ouvert affine de la forme X_s avec $s \in \mathcal{L}^{\otimes n}(X)$, $n \geq 1$.

Exercice 5. Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit $E \subset \mathbf{P}^2_k$ la courbe elliptique définie par l'équation homogène $y^2 z = x^3 - xz^2$. Soit $P = (0 : 1 : 0) \in E(k)$. On note $K = k(E)$ le corps des fonctions de E.

1. Montrer que $E_{\overline{k}}$ est régulière et en déduire que E est un schéma de Dedekind.
2. On note $v_Q : K^\times \to \mathbf{Z}$ la valuation discrète associée à un point fermé Q de E. Soit $D = \sum_{Q \in E^0} n_Q[Q]$ une combinaison linéaire formelle de points fermés de E, à coefficients dans $\mathbf{Z}$. On définit un préfaisceau $\mathcal{L}(D)$ sur E en posant
$$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in K : \forall Q \in U \cap E^0, v_Q(f) \geq -n_Q\}$$
   pour tout ouvert U non vide de E. Montrer que $\mathcal{L}(D)$ est un faisceau inversible sur E.
3. Montrer que le faisceau inversible $\mathcal{L}(P)$ est ample, mais n'est pas engendré par ses sections globales (et donc n'est pas très ample).

Exercice 6 (Surface de Veronese)**.** Soit k un corps et $X = \mathbf{P}^2_k$.

1. Montrer qu'il existe une immersion fermée $f : X \to \mathbf{P}^5_k$ telle que $f^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^5_k}(1) \cong \mathcal{O}_X(2)$. Le morphisme f est appelé *plongement de Veronese.*
2. Montrer que les sections globales $x^2, y^2, z^2, y(x-z), (x-y)z$ de $\mathcal{O}_X(2)$ définissent un plongement de X dans $\mathbf{P}^4_k$.