ENS de Lyon Option C
2014-2015

TD/TP : Algèbre linéaire

1 Algèbre linéaire sur un corps

On fixe un corps k.

Exercice 1 (Systèmes linéaires et formes réduites)
On considère le système linéaire $(*)$: $AX = B$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(k)$ et $B \in k^n$, et l'inconnue X appartient à k^p.
Soit $M = [AB] \in \mathcal{M}_{n,p+1}(k)$ la matrice obtenue en concaténant A et B.

1. On note A' (resp. M') la forme réduite échelonnée par colonnes de A (resp. M). Montrer que $(*)$ admet une solution si et seulement si A' et M' ont les mêmes colonnes non nulles. Si tel est le cas, comment obtenir une solution de (*) ?
2. On note M'' la forme réduite échelonnée par lignes de M. Montrer que $(*)$ admet une solution si et seulement si la dernière colonne de M'' ne contient pas de pivot. Si tel est le cas, comment obtenir une solution de (*) ?
3. Quelle méthode vous semble-t-elle la plus efficace ?

Exercice 2 (Applications linéaires et formes réduites)
Soit $f : k^p \to k^n$ une application linéaire, et soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(k)$ la matrice de f dans les bases canoniques de k^p et k^n.

1. Comment se traduisent l'injectivité (resp. la surjectivité, la bijectivité) de f sur la forme réduite échelonnée par lignes de M ?
2. Mêmes questions pour la forme réduite échelonnée par colonnes de M.
3. En déduire un programme Sage qui teste si une famille de vecteurs de k^n est libre (resp. génératrice).

Exercice 3 (Manipulations)

1. Comment définir une matrice ? Comment obtenir la matrice identité ? une matrice aléatoire ?
2. Comment additionner, multiplier des matrices ?

3. Comment calculer le déterminant, l'inverse, le polynôme caractéristique d'une matrice ?

Exercice 4 (Polynôme caractéristique) Comparer, sur une matrice A assez grosse (taille 20 devrait suffire), le temps de calcul du polynôme caractéristique par la commande de Sage, avec le temps pris en lui demandant le calcul de $\det(X\mathrm{Id} - A)$. Faire le test avec des matrices avec des coefficients entiers et avec des matrices à coefficients réels.

Exercice 5 (Représentation des sous-espaces vectoriels)

1. Écrire un algorithme qui prend en argument une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(k)$ et renvoie un couple (M', P) où $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ et $M' = PM$ est la forme réduite échelonnée par lignes de M.

   Indication : considérer la forme réduite échelonnée de $\tilde{M} = (M|I_n)$.
2. En déduire un algorithme qui prend en argument une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(k)$ et renvoie un couple (M', P) où $P \in \mathrm{GL}_p(k)$ et $M' = MP$ est la forme réduite échelonnée par colonnes de M.
3. Écrire un algorithme qui prend en argument une famille d'équations (représentées par des lignes) et renvoie une base de sous-espace vectoriel défini par ces équations.
4. Écrire un algorithme qui prend en argument une famille de vecteurs (représentés par des colonnes) et renvoie un système d'équations indépendantes définissant le sous-espace engendré par ces vecteurs.

Exercice 6 (Compléter une famille en une base)

Écrire un programme Sage qui teste si une famille de vecteurs de k^n (représentée par une matrice à n lignes) est libre, et si oui la complète en une base de k^n.

Tester ce programme sur des exemples.

Exercice 7 Écrire un programme Sage qui prend en argument des familles finies de vecteurs L et G de k^n, avec L libre, G génératrice et $L \subset G$, et renvoie une base B de k^n telle que $L \subset B \subset G$.

2 Algèbre linéaire sur $\mathbb{Z}$

Exercice 8 (Systèmes linéaires et formes normales de Hermite)

On considère le système linéaire $(*)$: $AX = B$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$ et $B \in \mathbb{Z}^n$, et l'inconnue X appartient à $\mathbb{Z}^p$.

Soit $M = [AB] \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{Z})$ la matrice obtenue en concaténant A et B.

1. On note A' (resp. M') la forme normale de Hermite suivant les colonnes de A (resp. M). Montrer que $(*)$ admet une solution si et seulement si A' et M' ont les mêmes colonnes non nulles.
2. Si tel est le cas, comment obtenir une solution de (*) à partir des matrices de transformation de A et M vers leurs formes normales ?

Exercice 9 (Applications linéaires et formes normales de Hermite)
Soit $f : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^n$ une application linéaire, et soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$ la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{Z}^p$ et $\mathbb{Z}^n$.

1. Comment se traduisent l'injectivité (resp. la surjectivité, la bijectivité) de f sur la forme normale de Hermite suivant les lignes de M ?
2. Mêmes questions pour la forme normale de Hermite suivant les colonnes de M.

Exercice 10 (Compléter une famille en une base)
Écrire un programme Sage qui teste si une famille de vecteurs de $\mathbb{Z}^n$ (représentée par une matrice à n lignes) peut être complétée en une base de $\mathbb{Z}^n$, et si oui fournit une telle base.

Tester ce programme avec les vecteurs suivants :

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 À l'aide de la forme normale de Hermite suivant les colonnes, trouver les (x, y, z) entiers tels que $2x+3y+5z = 0$ et ceux tels que $2x+3y+5z = 1$. Comparer le premier résultat avec ce qu'on obtient si l'on demande à Sage une base rationnelle de solutions et que l'on chasse les dénominateurs de cette base.

Exercice 12 (Forme normale de Smith)
Soit $M \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$. On rappelle qu'il existe une unique matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots d_{\min(p,n)}) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$ avec les d_i entiers ≥ 0 et $d_i | d_{i+1}$ (les d_i sont appelés facteurs invariants de M), et deux matrices U et V dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{GL}_p(\mathbb{Z})$ respectivement, telles que $UMV = D$. On appelle cette écriture la forme normale de Smith (commande `ismith`).

1. Utiliser ceci pour calculer avec Sage une base de $\mathbb{Z}^n$ adaptée à un sous-module L de $\mathbb{Z}^n$.
2. Tester votre programme avec $L = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, $L = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Exercice 13 Soit G le groupe abélien engendré par les éléments x, y, z soumis aux relations : $2x+3y-3z = 6x+5y+3z = 4y-2z = 0$. Déterminer sa structure comme groupe abélien et en donner une base en fonction de x, y, z.

3 Décomposition de Dunford

Exercice 14 (Par jordanisation) Soit M une matrice carrée à coefficients rationnels. Donner une procédure qui renvoie la décomposition de Dunford de M en utilisant la commande Sage pour la jordanisation.

Exercice 15 (Par la méthode de Newton) Soit M comme précédemment, et soit P un polynôme à racines simples tel que $P^n(M) = 0$ (où n est la taille de la matrice). On définit une suite de matrices par $M_0 = M$, et $M_{i+1} = M_i - P(M_i)P'(M_i)^{-1}$. La suite se stabilise à l'étape n au plus tard, et en posant $M_n = D$ et $N = M - D$, l'écriture $M = D+N$ est la décomposition de Dunford de M.

1. Vérifier les affirmations précédentes. On justifiera en particulier que $P'(M_i)$ est toujours inversible, et qu'on peut obtenir son inverse sous la forme d'un polynôme en M_i, le polynôme ne dépendant pas de i.
2. Programmer l'algorithme.
3. Vérifier qu'un tel polynôme P existe toujours, comment le calculer ?
4. En déduire un algorithme qui permet de calculer la décomposition de Dunford de M. Vous paraît-il plus efficace que le précédent ?