ENS de Lyon Option C
2014-2015

Résultants

Exercice 1 Soit A un anneau, $P \in A[X]_{\leq m}$, $Q \in A[X]_{\leq n}$.

Montrer qu'il existe des polynômes $U \in A[X]_{<n}$ et $V \in A[X]_{<m}$ tels que $\mathrm{Res}_{m,n}(P,Q) = UP + VQ$.

On pourra utiliser la comatrice de la matrice de Sylvester.

Exercice 2 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ les équations $x^2 + \alpha x + 1 = 0$ et $x^3 + 2\alpha x^2 + (\alpha^2+1)x + 1 = 0$ ont-elles une racine réelle commune ?

Exercice 3 Soit k un corps algébriquement clos. Soient $a, b, c, a', b', c' \in k$ avec $a, a' \neq 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les équations $ax^2 + bx + c = 0$ et $a'x^2 + b'x + c = 0$ aient une racine commune dans k. Que se passe-t-il si k n'est pas algébriquement clos ?

Exercice 4 Soit L/K une extension de corps. En utilisant le résultant, montrer que si $\alpha, \beta \in L$ sont algébriques sur K, alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.

Exercice 5 Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P, comptées avec multiplicité.

1. Soit $Q \in \mathbf{C}[X]$ non constant. Montrer que $\mathrm{Res}_X(P(X), Q(X) - T)$ est égal, à une constante près que l'on déterminera, à $\prod_{i=1}^n (T - Q(\alpha_i))$.
2. Soit $F \in \mathbf{C}(X)$ une fraction rationnelle non constante. Donner une façon de calculer $\prod_{i=1}^n (T - F(\alpha_i))$. Que se passe-t-il si une racine de P est un pôle de F ?
3. Application : on prend $F(X) = X^3/(X^2+1)$. Calculer $\sum_{i=1}^n F(\alpha_i)$ pour $P(X) = X^4 + X + 1$, $P(X) = X^4 + 1$.

Exercice 6 Effectuer la pseudo-division euclidienne de U par V dans les cas suivants :

1. $U = 2X^2 + X + 3$, $V = 6X - 1$ dans $\mathbf{Z}[X]$.
2. $U = Y^3 + X + Y$, $V = XY + 1$ dans $\mathbf{C}[X][Y]$ et dans $\mathbf{C}[Y][X]$.

Quelle est l'interprétation géométrique du pseudo-reste trouvé en 2. ?

Exercice 7 Soient p, q des nombres premiers distincts. Montrer que l'on a $\mathrm{Res}(\Phi_p, \Phi_q) = 1$. Peut-on généraliser ?

Applications du résultant à la géométrie

Exercice 8 Soient f et g dans $k[x_1, \ldots, x_n]$, tels que x_1 apparaît dans f et dans g. On pose $I = \langle f, g \rangle$, et $I_1 = I \cap k[x_2, \ldots, x_n]$. On pose $h = \mathrm{Res}_{x_1}(f, g)$. Soient $u, v \in k[x_2, \ldots, x_n]$ les coefficients dominants respectifs de f et g vus comme polynômes en x_1.

1. Montrer que $h \in I_1$.
2. Montrer que $h = 0$ si et seulement si f et g ont un facteur commun dans lequel x_1 apparaît.
3. On suppose à partir de maintenant que k est algébriquement clos. Soit $(a_2, \ldots, a_n) \in k^{n-1}$ un zéro de h. Montrer que soit il existe $a_1 \in k$ tel que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un zéro commun de f et g, soit $(a_2, \ldots, a_n)$ est un zéro commun de u et v.
4. En considérant $f = x_1x_2 - 1$, $g = x_1x_3 - 1$, vérifier que si u et v s'annulent il n'existe pas forcément de a_1 complétant la solution.
5. Montrer sur un exemple que les résultats précédents sont faux lorsque $k = \mathbf{R}$.

Exercice 9 Pour chacune des courbes paramétrées du plan suivantes, donner une équation implicite de la courbe. Que penser de l'image de la paramétrisation par rapport à l'équation obtenue ?

1. $x(t) = 1 + t$, $y(t) = 1 + t^3$.
2. $x(t) = t + t^2$, $y(t) = t^3$.
3. $x(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $y(t) = \frac{2t}{1-t^2}$.

Exercice 10 On se donne deux surfaces de $\mathbf{R}^3$ données par des équations polynomiales implicites $S : F(x, y, z) = 0$ et $S' : G(x, y, z) = 0$. On note $C = S \cap S'$. Montrer que la projection orthogonale de C sur le plan (Oxy) est incluse dans le lieu des zéros du polynôme $R = \mathrm{Res}_z(F, G) \in \mathbf{R}[x, y]$.

Y a-t-il nécessairement égalité ? Majorer le degré de la courbe C en fonction des degrés de F et G.