ENS de Lyon | Option C
2014-2015

TP POLYNÔMES

1 Manipulations

Exercice 1
- Comment obtenir le degré, la valuation d'un polynôme ?
- Comment obtenir le coefficient dominant et le coefficient de plus bas degré d'un polynôme ?
- Comment transformer un polynôme en liste, et réciproquement ?
- Comment évaluer un polynôme ?
- Comment composer deux polynômes ?
- Comment adapter les commandes précédentes lorsque les polynômes ont plusieurs variables ?

2 Interpolation

Exercice 2 Écrire une procédure, dépendant de 4 paramètres f, a, b et n, qui renvoie le polynôme qui interpole la famille $(x_k, f(x_k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ où les x_k sont uniformément répartis entre a et b. On pourra commencer par écrire une procédure dépendant des paramètres a, b, n qui renvoie la liste des x_k.

Exercice 3 (Phénomène de Runge) Soit a un réel > 0 et f_a la fonction sur l'intervalle $[-1, 1]$ définie par $f_a(x) = 1/(1 + ax^2)$. Pour quelques valeurs de n, tracer sur un même graphique la fonction f et le polynôme P obtenu (on essaiera avec $a = 1/10$ et $a = 10$ par exemple).

Exercice 4 Refaire les exercices précédents en remplaçant les points équi-répartis par les points de Tchebychev $x_k = \cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n})$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

3 Polynômes orthogonaux

Exercice 5 Écrire une procédure qui prend en argument un entier n et renvoie le polynôme H_n de degré n défini par $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}(\frac{d}{dx})^n e^{-x^2/2}$ (polynômes d'Hermite).

Exercice 6 1. Écrire une procédure qui prend en argument un entier n et renvoie un polynôme P de degré n tel que $((1-X^2)P')'+n(n+1)P = 0$ avec $P(1) = 1$ (polynômes de Legendre).

2. Représenter sur un même graphique les vingt premiers polynômes de Legendre sur $[-1, 1]$.

Exercice 7 1. Écrire une procédure qui prend en argument un entier n et renvoie le n-ième polynôme de Tchebychev T_n en exploitant la série génératrice suivante :

$$\sum_{n\geqslant 0} T_n(x)t^n = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}.$$

2. Représenter sur un même graphique les vingt premiers polynômes de Tchebychev sur $[-1, 1]$.

4 Décomposition sans carré

Exercice 8 1. Écrire une procédure qui teste si un polynôme $P \in \mathbf{Q}[X]$ est sans facteur carré et, si tel n'est pas le cas, renvoie un couple (Q, R) tel que $P = QR^2$ avec $\deg(R) \geqslant 1$.

2. Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ non nul. Montrer qu'il existe une décomposition, unique aux inversibles près, de la forme $P = P_1 P_2^2 \cdots P_m^m$ où les polynômes $P_1, \ldots, P_m$ sont sans facteur carré et deux à deux premiers entre eux.
3. Écrire une procédure qui prend en argument P et renvoie la suite $(P_1, \ldots, P_m)$.

5 Nombres algébriques

Soit α un nombre algébrique de degré $d \geqslant 1$. On note P le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$. On rappelle que tout élément x de $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=0}^{d-1} a_i\alpha^i$ avec $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbf{Q}$.

Exercice 9 1. Écrire une procédure qui prend en argument le polynôme P, des éléments $x, y \in K$ et renvoie $x+y$ (resp. xy, x/y lorsque $y \neq 0$). Estimer le coût du calcul en fonction de d.

2. Écrire une procédure qui prend en argument le polynôme P, un élément $x \in K$ et renvoie un polynôme annulateur de x sur $\mathbf{Q}$.
3. Écrire une procédure qui prend en argument le polynôme P, un élément $x \in K$ et renvoie le polynôme minimal de x sur $\mathbf{Q}$.