ENS de Lyon Option C
2014-2015

TP Résultants

Exercice 1 (Calcul du résultant)

1. Écrire une fonction qui calcule le résultant de deux polynômes en utilisant l'algorithme d'Euclide.
2. Vérifier sur quelques exemples que cette fonction renvoie la même chose que la commande dédiée Sage.
3. Comparer le temps de calcul avec la méthode consistant à calculer le déterminant de la matrice de Sylvester.

Exercice 2 (Formule de Héron) Soit ABC un triangle, avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$. Montrer la formule de Héron

$$S^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}$$

où S est l'aire du triangle. On introduira le pied H de la hauteur issue de A, $x = AH$ et $y = BH$ et on écrira trois équations reliant S, x, y à a, b, c.

Exercice 3 (Courbes paramétrées) On considère la courbe paramétrée $x(t) = t(t^2-1)^2$, $y(t) = t^2+1$.

1. Tracer cette courbe paramétrée.
2. En donner une équation cartésienne, et tracer la courbe à l'aide de cette équation.
3. Obtient-on des points surnuméraires ?
4. Comparer les deux courbes en zoomant autour du point $(0, 2)$. Quelle méthode (paramétrique ou implicite) permet de tracer la courbe avec le plus de précision le plus rapidement ? Pourquoi ce point particulier est-il problématique ?
5. Mêmes questions avec les courbes paramétrées du TD Résultants, exercice 9.
6. Mêmes questions avec la cardioïde, d'équation paramétrique $x(t) = \cos t(1 + \cos t)$, $y(t) = \sin t(1 + \cos t)$ (on commencera par trouver une paramétrisation rationnelle).

Exercice 4 (Intersection de courbes planes) On considère les courbes $C : xy = 4$ et $C' : y^2 = (x-3)(x^2-16)$.

1. Tracer les deux courbes sur un même graphique (avec des couleurs différentes).
2. Donner une équation de la projection de $C \cap C'$ sur l'axe des x. La factoriser sur $\mathbf{R}$. Combien de points trouve-t-on ? Combien en aurait-on attendu ?
3. $C \cap C'$ rencontre-t-il la droite $y = -2x + 1$?

Exercice 5 Calculer l'intersection des courbes planes C et C' dans les cas suivants :

1. $C : y^2 = x^3 - x$ et $C' : (x-1)^2 + y^2 = 1$.
2. $C : y^2 = x^3 - x$ et $C' : x^2 = y^3 - y$.

Dans chacun des cas, interpréter le nombre de points d'intersection.

Exercice 6 (Intersection de surfaces) Considérons le point $M = (2, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ et soit S la sphère de centre O passant par M. Soit C le cylindre d'axe (Oz) et de base le cercle de diamètre $[OM]$ dans le plan (Oxy).

1. Déterminer des équations cartésiennes pour la courbe $X = C \cap S$.
2. Déterminer les projections orthogonales de X sur les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz).
3. Faire de même pour l'intersection de C avec le cylindre C' de centre O, de rayon 1 et d'axe (Oy).

Exercice 7 Soit $C : f(x, y) = 0$ une courbe algébrique plane réelle. À l'aide de résultants, montrer que l'ensemble X_r des points de $\mathbf{R}^2$ situés à une distance donnée r de C est (inclus dans) une courbe algébrique, et en donner une équation implicite dans le cas $C : x^2 + 2y^2 = 1$ avec $r = 1$.

Exercice 8 Résoudre le système polynomial suivant : $x + y + z = 30$, $x^2 + y^2 + z^2 = 302$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3060$.

Exercice 9 Soit $P(X) = X^4 + X + 1$, et $\{a_i\}$ ses racines. Construire le polynôme $Q(X) = \Pi_i(X - a_i^3)$.

Exercice 10 (Pseudo-division euclidienne) Écrire un programme qui prend en entrée deux polynômes P, Q en deux variables x, y, et qui effectue la pseudo-division euclidienne de P par Q par rapport à la variable x.

Tester ce programme sur les exemples du TD Résultants, exercice 6.

Exercice 11 (Calcul de PGCD de polynômes)

1. Écrire un programme qui calcule le pgcd de deux polynômes en deux variables (au sens des anneaux factoriels).
2. Tester sur des exemples et comparer le résultat avec la commande dédiée de Sage.
3. Même chose avec 3 variables.