ENS de Lyon Option C
2014-2015

TD Résultant et intersection de courbes planes

Dans ce problème, on étudie le nombre de points d'intersection de deux courbes planes, définies par des équations polynomiales.

Soient P et Q des polynômes de $\mathbf{C}[X,Y]$ tels que $\operatorname{pgcd}(P,Q)=1$ dans l'anneau factoriel $\mathbf{C}[X,Y]$. On pose

$$\begin{aligned} C_P &= \{(x,y)\in\mathbf{C}^2 ; P(x,y)=0\},\\ C_Q &= \{(x,y)\in\mathbf{C}^2 ; Q(x,y)=0\}.\end{aligned}$$

1. Montrer que P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbf{C}(X)[Y]$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $D\in\mathbf{C}[X]$ non nul, et des polynômes $A,B\in\mathbf{C}[X,Y]$ tels que $D=AP+BQ$.
3. En déduire que $C_P\cap C_Q$ est fini.

On veut maintenant estimer le cardinal de $C_P\cap C_Q$ à l'aide de la théorie du résultant. Pour ce faire, on suppose dans un premier temps que P et Q sont de la forme

$$P = Y^p + \sum_{i=1}^{p} P_i(X)Y^{p-i} \qquad Q = Y^q + \sum_{j=1}^{q} Q_j(X)Y^{q-j}, \tag{1}$$

avec $\deg P_i \leqslant i$ et $\deg Q_j \leqslant j$ pour tout i et j. Posons

$$R = \operatorname{Res}_{p,q,Y}(P,Q)\in\mathbf{C}[X].$$

Soit $\pi : \mathbf{C}^2\to\mathbf{C}$ la projection définie par $\pi(x,y)=x$.

4. Montrer que $\pi(C_P\cap C_Q)$ est l'ensemble des racines de R.
5. On rappelle que la matrice de Sylvester $M=\operatorname{Syl}_{p,q,Y}(P,Q)$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_p & 0 & \cdots & 0\\ 0 & P_0 & P_1 & \cdots & P_p & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & P_0 & P_1 & \cdots & P_p\\ Q_0 & Q_1 & \cdots & \cdots & Q_q & & 0\\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & Q_0 & Q_1 & \cdots & \cdots & Q_q \end{pmatrix}.$$

   avec $P_0=Q_0=1$. On pose $M=(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p+q}$. Montrer que

$$\deg M_{i,j} \leqslant \begin{cases} j-i & \text{si } 1\leqslant i\leqslant q,\\ j-i+q & \text{si } q+1\leqslant i\leqslant p+q.\end{cases}$$

6. En déduire $\operatorname{card}(\pi(C_P\cap C_Q))\leqslant pq$.

Revenons maintenant au cas général. Notons p (resp. q) le degré de P (resp. Q).

7. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{C}^2$. Si D est une droite vectorielle de $\mathbf{C}^2$ distincte de $\mathbf{C}e_1$, on note $\pi_D : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}e_1$ la projection parallèlement à D. Montrer que pour toute droite D de $\mathbf{C}^2$ sauf un nombre fini, la restriction de π_D à $C_P \cap C_Q$ est injective.
8. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ sauf un nombre fini, les polynômes $P(X+\lambda Y, Y)$ et $Q(X+\lambda Y, Y)$ sont, à une constante multiplicative près, de la forme (1).
9. En déduire $\operatorname{card}(C_P \cap C_Q) \leqslant pq$ dans le cas général.
10. Montrer sur un exemple que l'inégalité peut être stricte. Où sont les points « manquants » ?
11. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}$?

Remarque 1. La méthode du résultant permet également en pratique de déterminer $C_P \cap C_Q$. Pour ce faire, on peut commencer par calculer $\pi(C_P \cap C_Q)$ (ou toute autre projection adaptée au problème), grâce à un résultant. En substituant les racines obtenues dans P et Q, on est alors ramenés à trouver les racines communes de deux polynômes en Y, ce qui se fait à la main ou en calculant un pgcd.

Remarque 2. Le théorème de Bézout affirme que si l'on compte correctement les points d'intersection des courbes $P(x,y) = 0$ et $Q(x,y) = 0$, on obtient précisément pq. Pour ce faire, on doit travailler dans l'espace projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, et considérer les courbes projectives $\overline{C_P}$ et $\overline{C_Q}$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ définies par l'annulation des polynômes homogènes $\widetilde{P} = Z^p P(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$ et $\widetilde{Q} = Z^q Q(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$ de $\mathbf{C}[X,Y,Z]$ (il est facile de voir que $C_P \cap C_Q = \overline{C_P} \cap \overline{C_Q} \cap \mathbf{C}^2$). Le résultant $\widetilde{R} = \operatorname{Res}_{p,q,Z}(\widetilde{P}, \widetilde{Q})$, calculé par rapport à Z en degrés p et q, est alors un polynôme homogène de degré pq en X et Y (voir M.-P. Malliavin, *Algèbre commutative*, Masson, 1984, Chapitre 11, Lemme 8.1). En exercice, on peut montrer que si $\widetilde{R} \neq 0$, alors les racines de $\widetilde{R}$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sont exactement les images de $\overline{C_P} \cap \overline{C_Q}$ par la projection $f : \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus \{O\} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de centre $O = (0:0:1)$ sur la droite à l'infini.

Par ailleurs, il est nécessaire de compter les points d'intersection avec multiplicité : même dans l'espace projectif, on peut avoir $\operatorname{card}(\overline{C_P} \cap \overline{C_Q}) < pq$ (exercice : trouver un exemple !). En première approche, on peut définir la multiplicité d'un point d'intersection comme la multiplicité de la racine correspondante du résultant (pour une projection convenable), ce qui permet alors de « démontrer » le théorème de Bézout.