Introduction la théorie des fonctions zêta et L et à leur applications.

par F. Brunault, M. Carrizosa, D. Essouabri, F. Nuccio, F. Pellarin et X. Roblot.

Dans ce projet de parcours, nous proposons une sélection de quelques aspects de la théorie des fonctions zêta et fonctions L. Ce thème est plutôt multiforme et nous voulons, avec des choix assez variés de thèmes, en montrer la richesse et aussi l'importance dans une sélection de problèmes arithmétiques. En fait, assez souvent, les fonctions zêta sont une clé d'accès à d'autres théories.

Nous proposons ici un parcours organisé en deux cours fondamentaux (*Géométrie algébrique*, par F. Brunault et F. Nuccio et *Théorie algébrique des nombres* par M. Carrizosa et X. Roblot) et deux cours spécialisés (*Séries de Dirichlet et fonctions zêtas à une ou plusieurs variables* par D. Essouabri et *Valeurs de fonctions L associées à des modules de Drinfeld* par F. Pellarin). Dans chacun de ces cours, l'empreinte des fonctions zêta est profonde et motivante.

Dans le premier cours fondamental d'introduction à la géométrie algébrique, les fonctions zêta de Hasse-Weil joueront un rôle fondamental et leurs propriétés (rationalité, répartition des zéros) seront analysées. Dans le deuxième cours fondamental d'introduction à la théorie algébrique des nombres, l'accent sera mis sur les fonctions zêta de Dedekind. Les cours fondamentaux ne viseront pas exclusivement les propriétés des fonctions zêta ; ils viseront à donner des compétences solides dans des sujets de base en arithmétique.

Dans le premier cours spécialisé par D. Essouabri, les fonctions zêta permettront d'approfondir des sujets aussi variés que la théorie des fractales ou le problème de la répartition des points de hauteur bornée dans les variétés algébriques. Enfin, dans le cours spécialisé par F. Pellarin, la théorie des modules de Drinfeld fournira un terrain vaste d'investigation à travers leurs fonctions zêta qui présentent ici des qualités proches à la fois de celles des fonctions zêta de Hasse-Weil et de la fonction zêta de Riemann.

Géométrie algébrique

par F. Brunault et F. Nuccio

Ce cours fondamental est un cours d'introduction à la géométrie algébrique. Nous avons pris le parti d'utiliser le langage des schémas, qui est devenu l'outil indispensable pour faire de la géométrie arithmétique.

Historiquement, ce langage fut développé par Grothendieck pour démontrer les conjectures de Weil sur les fonctions zêta des variétés algébriques sur les corps finis. Dans ce cours, nous posons les bases du formalisme des schémas en essayant de donner l'intuition géométrique sous-jacente : un morphisme de schémas est une famille de variétés algébriques (définies sur des corps pouvant varier).

Sans nous appesantir sur les propriétés fines des schémas et des morphismes de schémas, notre objectif est de mettre en place les outils techniques essentiels utilisés dans les cours spécialisés : cohomologie des faisceaux cohérents, contruction de plongements projectifs à l'aide de fibrés amples, étude des diviseurs, définition du groupe de Picard. En guise d'application de ces notions, et pour introduire aux fonctions zêta, nous expliquons comment montrer la rationalité de la fonction zêta associée à une courbe algébrique C définie sur un corps fini, à l'aide de la jacobienne de C.

Plan du cours

1. Le langage des schémas (12h)

- Rudiments de théorie des faisceaux.
- Spectre d'un anneau commutatif.
- Définition des schémas et des morphismes de schémas.
- Produit fibré ; fibres géométriques d'un morphisme de schémas.
- Immersions fermées ; schémas projectifs.

2. Faisceaux cohérents et cohomologie (12h)

- Faisceaux de modules quasi-cohérents et cohérents.
- Plongements projectifs.
- Cohomologie de Čech.
- Faisceau des différentielles.
- Faisceau canonique.

3. Groupe de Picard (12h)

- Faisceaux inversibles ; définition du groupe de Picard.
- Diviseurs de Cartier.
- Diviseurs de Weil.
- Jacobienne d'une courbe algébrique.
- Fonction zêta d'une courbe algébrique sur un corps fini.

Références. La référence principale du cours sera le livre [3] de Q. Liu.

[1] D. Eisenbud, J. Harris. *The geometry of schemes.* Graduate Texts in Mathematics, 197. Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] U. Görtz, T. Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes with examples and exercises.* Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010.

[3] Q. Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves.* Translated from the French by Reinie Erné. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6. Oxford University Press, 2002.

[4] D. Mumford. *The red book of varieties and schemes.* Second, expanded edition. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians. With contributions by Enrico Arbarello. Lecture Notes in Mathematics, 1358. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

Théorie algébrique des nombres

par Maria Carrizosa et Xavier Roblot

Le but de ce cours fondamental est de présenter les notions de base de la théorie algébrique des nombres. Il donne un panorama complet des notions fondamentales du domaine avec, en fin de cours, une attention particulière aux fonctions L. D'une part, nous donnerons la construction des fonctions zêta de Dedekind et la démonstration de la formule analytique du nombre des classes. D'autre part, nous étudierons les fonctions L de Dirichlet et leur lien avec les corps cyclotomiques. Ce cours sert également d'introduction au cours spécialisé de F. Pellarin où des notions similaires en caractéristique positive seront étudiées.

Plan du cours

1. Entiers algébriques et corps de nombres.
2. Norme, trace et discriminant.
3. Anneaux de Dedekind.
4. Groupe des idéaux. Groupe des classes.
5. Géométrie des nombres.
6. Groupe des unités.
7. Décomposition des idéaux premiers.
8. Extensions galoisiennes de corps de nombres.
9. Automorphisme de Frobenius et Groupe de décomposition.
10. Fonction zêta de Dedekind.
11. Fonctions L de Dirichlet et corps cyclotomiques.
12. Unités cyclotomiques et nombres de Bernoulli.

Références

[1] P. Samuel, *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Paris, 1967.

[2] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, GTM 110, Springer-Verlag, New York, 1994.

[3] L. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, GTM 83, Springer-Verlag, New York, 1997.

Séries de Dirichlet et fonctions zêtas à une ou plusieurs variables

par D. Essouabri

Ce cours avancé est une introduction à la théorie générale des séries de Dirichlet et fonctions zêtas à une ou plusieurs variables. Ces fonctions traduisent des problèmes d'origine arithmétique ou géométrique (comptage des solutions d'équations diophantiennes, densité des points rationnels sur les variétés algébriques, spectre d'opérateurs) en d'autres problèmes concernant l'existence et les propriétés de leur prolongement analytique. Les théorèmes taubériens interprètent ensuite l'information analytique obtenue sur ces derniers en information sur les problèmes arithmétiques ou géométrique du départ. Le but de ce cours est d'introduire quelques méthodes analytico-géométrique qui permettent d'étudier ces fonctions. Nous montrerons ensuite comment ces méthodes peuvent être utilisé pour étudier des classes a priori de natures assez différentes de fonctions zêtas.

Plan du cours

1. Généralités sur les séries de Dirichlet.
2. Théorème des nombres premiers.
3. Résidus multivariables (théorie de Leray).
4. Formules de représentations intégrales multivariables (formule de Bochner-Martinelli).
5. Résolution des singularités.
6. Multizêta et séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables.
7. Propriétés analytiques (prolongement méromorphe, diviseurs, croissance).
8. Valeurs spéciales et applications.
9. Introduction à la géométrie fractale.
10. Fonctions zêtas fractales.
11. Application à l'étude de la géométrie des fractales discrètes.
12. Conjecture de Manin sur les points rationnels des variétés algébriques.

Références.

[1] L. A. Aizenberg & A.P. Yuzhakov. *Integral Representation in Multidimensional Complex Analysis.* Translations of Amer. Math. Soc. 58, 1980.

[2] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras & A. Yger. *Residue currents and Bezout identities.* Progress in Mathematics, 114. Birkhäuser Verlag, 1993.

[3] D. Essouabri & B. Lichtin. *Zeta functions of discrete self-similar sets.* Adv. Math. 232 (2013), 142-187.

[4] K. Falconer. *Fractal geometry.* Mathematical foundations and applications. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2003.

[5] M. L. Lapidus and M. van Frankenhuijsen. *Fractal geometry, complex dimensions and zeta functions. Geometry and spectra of fractal strings.* Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2013

[6] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry 1 and 2.* Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1994

[7] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Cours Spécialisés, 1. SMF, Paris, 1995.

Valeurs de fonctions L associées à des modules de Drinfeld

par F. Pellarin

Ce cours spécialisé (second semestre) fournira une suite au cours d'introduction de premier semestre. Nous commencerons avec les bases de la théorie des corps cyclotomiques et le lien avec le module de Carlitz, en suivant [2]. Notre objectif sera d'expliquer le rôle d'une nouvelle classe de fonctions L en égale caractéristique, introduite dans [1]. On peut associer chaque module de Drinfeld une telle fonction L en considérant ses reductions modulo différents idéaux premiers pour construire les facteurs locaux des produits euleriens. La nouveauté ici est dans la notion de module de Drinfeld, considéré comme un foncteur à valeurs dans les algèbres de Tate.

L'étude de ces fonctions se fera en deux étapes. La première consiste à décrire ces fonctions sous le point de vue de la formule du corps de classes, mentionnée dans l'un des cours de premier semestre. Pour cela, nous allons nous utiliser le travail de L. Taelman [3] et nous allons étudier les propriétés fondamentales du module des classes et du module des unités d'un module de Drinfeld. des analogies seront observées avec la rationnalité des fonctions zêta de Hasse-Weil. La deuxième étape vise aux propriétés analytiques de ces fonctions, notamment leurs équations fonctionnelles, faisant intervenir la *fonction d'Anderson-Thakur* comme outil pour bâtir les facteurs gamma.

Plan du cours

1. Présentation des corps, anneaux utilisés, module de Carlitz
2. Modules de Drinfeld. Torsion du module de Carlitz
3. Extensions cyclotomiques de $\mathbb{F}_q(\theta)$
4. Théorie explicite du corps de Classes pour le module de Carlitz, le théorème de Carlitz-Hayes
5. Introduction à la théorie de Taelman: module des classes et module des idéaux
6. Théorie de Fredholm sur les espaces de Banach ultramétriques
7. Déterminants infinis, fonctions L
8. La formule du nombres de Classes de Taelman
9. Algèbres de Tate, modules de Drinfeld généralisés sur les algèbres de Tate

10. Fonction L d'un module de Drinfeld généralisé

11. Formule du nombre de Classes et conséquences: unités de Stark

12. Identités fonctionnelles, application aux premiers réguliers

Références

[1] F. Pellarin. *Values of certain L-series in positive characteristic.* Ann. of Math. pp. 2055-2093 Vol. 176 (2012).

[2] M. Rosen. *Number Theory in Function Fields.* Springer GTM.

[3] L. Taelman. *Special L-values of Drinfeld modules.* Ann. of Math. pp. 369-391, Vol. 175 (2012).